

SÉRIE A.
N° 2363
N° D'ORDRE
3235

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Gérard COUCHET

1^{ère} THÈSE. - LES MOUVEMENTS PLANS NON STATIONNAIRES A CIRCULATION
CONSTANTE ET LES MOUVEMENTS INFINIMENT VOISINS

2^{ème} THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 19 Mars 1948 devant LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. VILLAT : *Président*

J. PERES

G. BOULIGAND { *Examineurs*

O.N.E.R.A.

25, Avenue de la Division Leclerc
CHÂTILLON-SOUS-BAGNEUX

1949



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547114_0017

SÉRIE A.
N° 2363
N° D'ORDRE
3235

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Gérard COUCHET

1^{ère} THÈSE. - LES MOUVEMENTS PLANS NON STATIONNAIRES A CIRCULATION
CONSTANTE ET LES MOUVEMENTS INFINIMENT VOISINS

2^{ème} THÈSE. - PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 19 Mars 1948 devant LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. VILLAT : *Président*

J. PERES
G. BOULIGAND } *Examineurs*

O.N.E.R.A.
25, Avenue de la Division Leclerc
CHÂTILLON-SOUS-BAGNEUX

1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen. M. J. CABANNES

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM. . . . T	Botanique	GRASSE. T	Evolution des êtres organisés
G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	PREVOST	Chimie organique
C. MAUGUIN T	Minéralogie	BOULIGAND T	Application de l'analyse à la géométrie
A. DENJOY. T	Théorie des Fonctions, et Topologie	CHAUDRON. T	Chimie
L. LUTAUD. T	Géographie physique et géologique dynamique	WYART	Minéralogie
E. DARMOIS T	Enseignement de Physique	TEISSIER. T	Zoologie
Robert LEVY. T	Physiologie comparée	MANGENOT. T	Biologie végétale
Henri VILLAT T	Mécanique des fluides et applications	P. AUGER. T	Physique quantique et relativité
Ch. JACOB. T	Géologie	MONNIER	Physiologie générale
P. PASCAL. T	Chimie générale	PIVETEAU.	Géologie
M. FRECHET T	Calcul des probabilités et Physique mathématique	ROCARD. T	Physique
Mme RAMART-LUCAS . T	Chimie organique	H. CARTAN	Calcul différentiel
FOCH T	Mécanique physique et expérimentale	SCHAEFFER T	Physiologie des fonctions
PAUTHENIER T	Electrotechnique générale	LAFFITTE.	Chimie (P.C.B.)
DE BROGLIE T	Théories physiques	FAVARD.	Calcul des probabilités et physique - mathématique
JOB. T	Chimie générale	COULOMB T	Physique du globe
PRENANT. T	Anatomie et Histologie comparées	Mlle COUSIN	Biologie animale (P.C.B.)
VILLEY T	Mécanique appliquée	CHRETIEN.	Chimie (P.C.B.)
COMBES T	Physiologie végétale	DRACH	Zoologie
GARNIER. T	Géométrie supérieure	KASTLER	Physique
PERES. T	Mécanique rationnelle	CHATELET. T	Arithmétique et théorie des nombres
HACKSPILL. T	Chimie minérale	EPHRUSSI. T	Génétique
LAUGIER. T	Physiologie générale	WURMSER T	Biologie physico-chimique
TOUSSAINT T	Technique aéronautique	BAUER T	Chimie-physique
M. CURIE T	Physique (P.C.B.)	RIVIERE	Géologie (P.C.B.)
G. RIBAUD. T	Hautes températures	GAUTHERET	Biologie Végétale (P.C.B.)
CHAZY. T	Mécanique analytique et Mécanique céleste	LUCAS	Physique
H. GAULT T	Chimie appliquée	Max MORAND.	Physique
CROZE. T	Physique théorique et Physique céleste	ARNULF.	Optique appliquée
DUPONT T	Théories chimiques	A. THOMAS	Evolution des êtres organisés
VALIRON. T	Calcul différentiel et Calcul intégral	SOLEILLET	Physique
BARRABE. T	Géologie structurale et géologie appliquée	FORTIER	Mécanique expérimentale des fluides
VAVON. T	Analyse et mesures chimiques	DANJON T	Astronomie
G. DARMOIS T	Mathématiques générales	FROMAGEOT	Chimie biologique
Jacques BOURCART .	Géographie physique et Géologie dynamique	LAPORTE	Physique générale et radioactivité
AUBEL. T	Chimie biologique	JANET	Mathématiques générales
Mme JOLIOU-CURIE . T	Physique générale et Radioactivité	PETIT T	Biologie maritime
PLANTEFOL. T	Botanique	QUENEY. T	Météorologie et dynamique atmosphérique
CABANNES T	Recherches physiques	GALLIEN	Biologie animale (P.C.B.)
		EICHORN	Biologie végétale (P.C.B.)
		De CUJNAC	Biologie végétale (P.C.B.)
		LAVAL	Physique (P.C.B.)
		Mlle CAUCHOIS	Chimie-Physique
		THELLIER.	Physique du Globe
		AUDUBERT.	Electrochimie
		L'HERITIER.	Génétique.

Secrétaire. Ch. MONIER

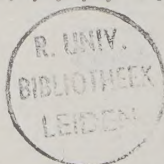


TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION _____	1
CHAPITRE I _____	9
1° - Enoncé du problème et notations _____	9
2° - Conditions aux limites _____	10
3° - Calcul du potentiel _____	10
3.1 - Cas particulier d'un profil Joukowski _____	13
3.2 - Existence de la solution trouvée pour $G(Z)$ _____	14
4° - Cas d'une circulation autour du profil _____	14
5° - Mouvement des molécules fluides par rapport au profil _____	15
6° - La force et le moment _____	17
7° - La rotation uniforme _____	18
8° - Le cas d'un profil présentant une pointe _____	19
9° - La rotation uniforme du profil à pointe _____	20
9.1 - Nouvelle expression de la force _____	20
9.2 - Les centres de rotation à portance nulle _____	21
9.3 - Correspondance entre le centre de rotation et le support de la force _____	21
9.4 - Généralisation de la notion de parabole métacentrique _____	21
9.5 - Cas particuliers _____	22
CHAPITRE II _____	24
1° - Les mouvements non stationnaires à circulation constante _____	24
2° - Construction géométrique _____	26
2.1 - Exemple d'une famille de mouvements à circulation nulle _____	26
3° - Calcul de la force et du moment _____	27
3.1 - Cas de la plaque _____	28
3.2 - La translation à circulation constante _____	29
3.3 - La plaque en circulation nulle _____	30
4° - Nouvelle expression de la force _____	31
4.1 - Mouvements périodiques à circulation constante _____	32

4.2 - Profil en rotation uniforme dans un vent de vitesse constante	33
4.3 - Rotation accélérée d'une plaque	36
5° - Aile en mouvement non stationnaire dans un courant	36
CHAPITRE III - Etude du potentiel dans le cas d'un échappement continu à la pointe du profil -	40
1° - Préliminaires	40
2° - Mouvement d'un profil sans pointe en présence d'un tourbillon	40
3° - Les équations dont dépend le problème dans le cas général	42
4° - Remarque sur le choix de la circulation initiale	44
5° - La détermination de $\Gamma(u)$ et $\zeta(u, t)$	45
6° - Les mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante	46
7° - Construction géométrique	48
8° - Etude de l'échappement tourbillonnaire dans un mouvement à circulation variable	48
9° - Etude de l'intensité tourbillonnaire	50
10° - Mouvement des centres tourbillonnaires dans un mouvement infiniment voisin d'un mouvement à circulation constante	51
11° - Calcul de la force et du moment dans le cas général	53
12° - Force et moment dans le cas d'un mouvement infiniment voisin d'un mouvement à circulation constante	54
CHAPITRE IV - Etude de quelques mouvements infiniment voisins de la translation à circulation nulle -	58
1° - Aile épaisse en mouvement infiniment voisin d'un mouvement de translation uniforme à circulation nulle	58
1.1 - Détermination de la circulation	58
1.2 - Calcul pratique de la fonction circulation	62
1.3 - Détermination des efforts aérodynamiques	62
1.4 - Vitesse critique d'une aile épaisse	66
2° - La plaque en mouvement infiniment voisin d'un mouvement de translation non uniforme à circulation nulle	71
2.1 - Cas particuliers	73
2.2 - Calcul de la force et du moment	75
BIBLIOGRAPHIE	78

que l'on doit retrouver comme flux des tourbillons libres apparaissant, dans le même intervalle, dans l'élément $d\xi$, soit :

$$\varepsilon(\xi, t) V dt = \varepsilon(\xi + d\xi, t) V dt$$

D'où

$$(4) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0 \quad -l < \xi < +l$$

En aval de l'aile, γ est nul et l'on a :

$$(5) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = 0 \quad \xi > l$$

qui admet pour solution :

$$\varepsilon = f(\xi - Vt)$$

c'est-à-dire que les tourbillons libres ont la vitesse V par rapport aux axes de référence.

Connaissant ε et γ , la vitesse fluide à l'affixe z sera donnée par

$$(6) \quad w = -\frac{i}{2\pi} \left(\int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)}{z - \xi} d\xi + \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\xi, t)}{z - \xi} d\xi \right)$$

Enfin, nous écrirons que la vitesse fluide relative au profil lui est tangente en chaque point, soit :

$$\mathcal{I}_m \left[\left(V - \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma + \varepsilon}{x - \xi} d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x - \xi} d\xi - \frac{\partial x}{\partial t} + i \frac{\partial y}{\partial t} \right) e^{i\alpha} \right] = 0$$

En négligeant les variations de α qui proviennent du profil, et en se limitant aux termes du premier ordre, il reste :

$$(7) \quad V \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi$$

Lorsque le mouvement instantané du profil résulte d'une rotation ω autour de O et d'une translation (u, v) suivant les axes, on a :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \sim \omega x + v$$

et les équations (4) et (7) doivent déterminer γ et ε .

Calcul de la portance.

La pression en un point du profil est donnée par la formule :

$$p = \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

φ étant le potentiel des vitesses dans le mouvement absolu ou dans le mouvement par rapport aux axes ox, oy . Nous calculerons la différence des pressions au même point et de part et d'autre du profil, (voir figure ci-contre), soit :

$$p_1 - p_2$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) - \rho \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_2 \right]$$

segment $-l, +l$. La formule (1) devient ainsi :

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (1')$$

L'équation (3) dont dépend la détermination de $\gamma(\xi)$ se simplifiera en remarquant que :

$$\cos \alpha \sim 1 \quad \sin \alpha \sim \frac{dy}{dx}$$

elle s'écrira :

$$V \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (3')$$

L'équation (3') est fondamentale dans la théorie de l'aile mince en translation uniforme; on voit que l'on a réparti les tourbillons représentatifs du profil sur le segment $-l, +l$ qui en est la projection sur ox . Mais on tient compte cependant, pour calculer la répartition de circulation $\gamma(x)$, des pentes du profil par la relation (3') où apparaît seulement la demi-somme $\frac{w_1 + w_2}{2}$ des vitesses induites sur les deux faces du profil.

[1] Passons au cas non stationnaire, étudié pour la première fois par BIRNBAUM⁽¹⁾
[2].

Le profil n'est plus fixe par rapport aux axes xOy animés de la translation $-V$. Le point du profil qui se projette en ξ ($-l < \xi < +l$) à l'instant initial aura ses coordonnées X et Y qui dépendront de ξ et de t .

$$X(\xi, t) \quad Y(\xi, t)$$

Nous supposons que le mouvement du profil reste voisin de la translation $-V$, de sorte que $X - \xi$ et $Y - \eta$ restent très petits ainsi que leurs dérivées. Le mouvement fluide, voisin du précédent, ne sera plus stationnaire et les vitesses w_1 et w_2 en un point du profil dépendront, en général, de ξ et t ; il en sera de même de γ .

Enfin, ici encore, on attribuera à l'élément $d\xi$ de l'axe ox , la circulation de l'élément $ds \sim d\xi$ du profil. Mais il est essentiel de remarquer que la circulation $\gamma(\xi, t) d\xi$ d'un élément $d\xi$ du profil dépend de t ; il est donc assez naturel de considérer, avec BIRNBAUM, que la variation d'intensité des tourbillons liés au profil est corrélative de l'existence des tourbillons libres. On remplacera donc $\gamma(\xi, t)$ par :

$$\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)$$

γ et ε correspondant respectivement aux tourbillons liés et libres. Les premiers sont entraînés par le profil; les seconds resteront, en première approximation, à l'endroit de leur formation dans le fluide : ils auront donc la vitesse V par rapport au système xOy animé de la translation $-V$. En aval du profil, on retrouvera les seuls tourbillons libres.

Le théorème de la conservation de l'intensité tourbillonnaire fournit une première relation différentielle entre γ et ε .

Sur le segment $\xi, \xi + d\xi$ l'intensité des tourbillons (libres et liés) a, pendant l'intervalle de temps dt une variation :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\xi dt$$

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

segment $-l, +l$. La formule (1) devient ainsi :

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (1')$$

L'équation (3) dont dépend la détermination de $\gamma(\xi)$ se simplifiera en remarquant que :

$$\cos \alpha \sim 1 \quad \sin \alpha \sim \frac{dy}{dx}$$

elle s'écrira :

$$V \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (3')$$

L'équation (3') est fondamentale dans la théorie de l'aile mince en translation uniforme; on voit que l'on a réparti les tourbillons représentatifs du profil sur le segment $-l, +l$ qui en est la projection sur ox . Mais on tient compte cependant, pour calculer la répartition de circulation $\gamma(x)$, des pentes du profil par la relation (3') où apparaît seulement la demi-somme $\frac{w_1 + w_2}{2}$ des vitesses induites sur les deux faces du profil.

Passons au cas non stationnaire, étudié pour la première fois par BIRNBAUM⁽¹⁾ [1] [2].

Le profil n'est plus fixe par rapport aux axes xOy animés de la translation $-V$. Le point du profil qui se projette en ξ ($-l < \xi < +l$) à l'instant initial aura ses coordonnées X et Y qui dépendront de ξ et de t .

$$X(\xi, t) \quad Y(\xi, t)$$

Nous supposons que le mouvement du profil reste voisin de la translation $-V$, de sorte que $X - \xi$ et $Y - \eta$ restent très petits ainsi que leurs dérivées. Le mouvement fluide, voisin du précédent, ne sera plus stationnaire et les vitesses w_1 et w_2 en un point du profil dépendront, en général, de ξ et t ; il en sera de même de γ .

Enfin, ici encore, on attribuera à l'élément $d\xi$ de l'axe ox , la circulation de l'élément $ds \sim d\xi$ du profil. Mais il est essentiel de remarquer que la circulation $\gamma(\xi, t) d\xi$ d'un élément $d\xi$ du profil dépend de t ; il est donc assez naturel de considérer, avec BIRNBAUM, que la variation d'intensité des *tourbillons liés au profil* est corrélative de l'existence des *tourbillons libres*. On remplacera donc $\gamma(\xi, t)$ par :

$$\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)$$

γ et ε correspondant respectivement aux tourbillons liés et libres. Les premiers sont entraînés par le profil; les seconds resteront, en première approximation, à l'endroit de leur formation dans le fluide: ils auront donc la vitesse V par rapport au système xOy animé de la translation $-V$. En aval du profil, on retrouvera les seuls tourbillons libres.

Le théorème de la conservation de l'intensité tourbillonnaire fournit une première relation différentielle entre γ et ε .

Sur le segment $\xi, \xi + \delta\xi$ l'intensité des tourbillons (libres et liés) a, pendant l'intervalle de temps dt une variation :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \delta\xi dt$$

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

que l'on doit retrouver comme flux des tourbillons libres apparaissant, dans le même intervalle, dans l'élément $d\xi$, soit :

$$\varepsilon(\xi, t) V dt - \varepsilon(\xi + d\xi, t) V dt$$

D'où

$$(4) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0 \quad -l < \xi < +l$$

En aval de l'aile, γ est nul et l'on a :

$$(5) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = 0 \quad \xi > l$$

qui admet pour solution :

$$\varepsilon = f(\xi - Vt)$$

c'est-à-dire que les tourbillons libres ont la vitesse V par rapport aux axes de référence.

Connaissant ε et γ , la vitesse fluide à l'affixe z sera donnée par

$$(6) \quad w = -\frac{i}{2\pi} \left(\int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)}{z - \xi} d\xi + \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\xi, t)}{z - \xi} d\xi \right)$$

Enfin, nous écrirons que la vitesse fluide relative au profil lui est tangente en chaque point, soit :

$$\mathcal{I}_m \left[\left(V - \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma + \varepsilon}{x - \xi} d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{x - \xi} d\xi - \frac{\partial x}{\partial t} + i \frac{\partial y}{\partial t} \right) e^{i\alpha} \right] = 0$$

En négligeant les variations de α qui proviennent du profil, et en se limitant aux termes du premier ordre, il reste :

$$(7) \quad V \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{+l}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\xi, t)}{x - \xi} d\xi$$

Lorsque le mouvement instantané du profil résulte d'une rotation ω autour de O et d'une translation (u, v) suivant les axes, on a :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \sim \omega x + v$$

et les équations (4) et (7) doivent déterminer γ et ε .

Calcul de la portance.

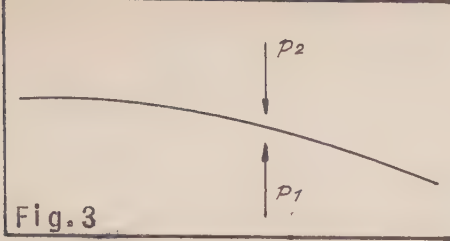
La pression en un point du profil est donnée par la formule :

$$p = \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

φ étant le potentiel des vitesses dans le mouvement absolu ou dans le mouvement par rapport aux axes ox, oy . Nous calculerons la différence des pressions au même point et de part et d'autre du profil, (voir figure ci-contre), soit :

$$p_1 - p_2$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) - \rho \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_2 \right]$$



On a sensiblement, en négligeant α :

$$-\frac{1}{2} (V_1 - V_2) (V_1 + V_2) = -\rho V (v_1 - v_2)$$

c'est-à-dire, d'après (2) où γ est remplacé par $\gamma + \varepsilon$:

$$-\rho V [\gamma(\xi, t) + \varepsilon(\xi, t)] \quad -l < \xi < +l$$

En laissant de côté le potentiel de translation, puisqu'il est indépendant de t , on peut prendre :

$$f = \varphi + i\psi = -\frac{i}{2\pi} \left[\int_{-l}^{+l} (\gamma + \varepsilon) L(z - \xi) d\xi + \int_{+l}^{+\infty} \varepsilon(\xi) L(z - \xi) d\xi \right]$$

d'où :

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} (\gamma + \varepsilon) \arg(z - \xi) d\xi + \int_{+l}^{+\infty} \varepsilon \arg(z - \xi) d\xi$$

En utilisant les équations (4) et (5), on obtient pour $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$:

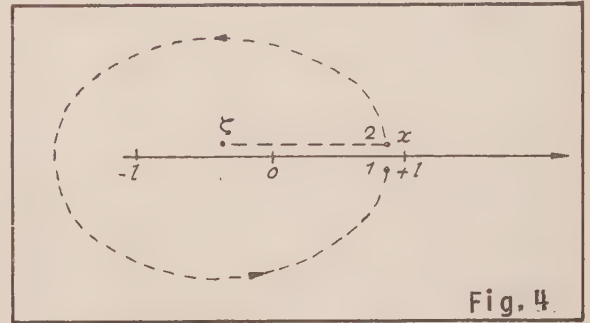
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{V}{2\pi} \int_{-l}^{+\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \arg(z - \xi) d\xi$$

En observant la figure ci-contre, on voit que :

$$\left[\arg(z - \xi) \right]_1^2 = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \xi < x \\ 0 & \text{si } \xi > x \end{cases}$$

donc :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_2^1 = -V \int_{-l}^x \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} d\xi = -V \varepsilon(x, t)$$



Finalement :

$$p_1 - p_2 = -\rho V \gamma(x, t)$$

C'est la règle de JOUKOWSKY appliquée au seul tourbillon lié.

Recherche de γ .

Pour résoudre l'équation (3'), BIRNBAUM se donne des valeurs particulières de $\gamma(\xi)$ qui conduisent à des valeurs simples de y :

$$\gamma_a = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

donne

$$y = \frac{1}{2V} x$$

$$\gamma_b = \sqrt{1-x^2}$$

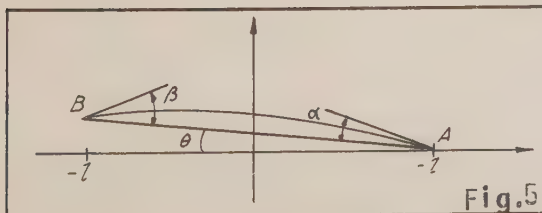
"

$$y = \frac{1}{4V} x^2$$

$$\gamma_c = x \sqrt{1-x^2}$$

"

$$y = \frac{1}{2V} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \right)$$



En combinant linéairement ces trois formes, il obtient un profil, ayant en commun avec le profil donné, les points A, B et les angles θ , α , β . (Voir ci-contre). La force et le mouvement sont calculés en utilisant une valeur de γ de la forme :

$$\gamma = a \gamma_a + b \gamma_b + c \gamma_c$$

On obtient :

$$F_x = \rho V \int_{-l}^{+l} \gamma dx \quad F_y = \rho \int_{-l}^{+l} \gamma w dx - \rho \pi \frac{a^2}{2}$$

$$M = \rho V \int_{-l}^{+l} \gamma x dx$$

Le terme $-\rho \pi \frac{a^2}{2}$ figurant dans la résistance est obtenu en tenant compte de la vitesse infinie provoquée, à la pointe avant, par la présence de γ_a . Au voisinage de cette pointe, on prend :

$$\gamma_a = a \sqrt{\frac{1-x}{1+x+\alpha}}$$

et l'on fait tendre α vers zéro.

Quand le mouvement n'est plus stationnaire, le procédé est encore le même et le cas de l'aile vibrante est abordé de la manière suivante :

l'intensité circulaire est prise sous la forme : $\gamma e^{i\omega V t}$

où γ garde la forme précédente. (a, b, c , sont alors complexes).

L'équation (4) donne $\varepsilon(x, t)$ et l'équation (7) permet de calculer $X(\xi, t)$ et $Y(\xi, t)$.

Enfin, la force est déterminée par :

$$F_x = \rho V \int_{-l}^{+l} \gamma dx \quad F_y = \rho V \int_{-l}^{+l} \gamma \left(w - \frac{\partial Y}{\partial t} \right) dx - \rho \pi \frac{a^2}{2}$$

$$M = \rho V \int_{-l}^{+l} \gamma x dx$$

5) - WAGNER en 1924 [35] reprend le même problème en utilisant la transformation conforme de la plaque sur un cercle.

Il suppose que les vibrations de la plaque entraînent la création de tourbillons libres qui sortent par l'arrière et qui demeurent au lieu de leur formation. Pour que la plaque reste ligne de courant, il introduit, après transformation dans le plan du cercle, les images de tourbillons libres par rapport à ce cercle.

En écrivant la condition de JOUKOWSKY pour le bord de fuite, WAGNER obtient l'équation intégrale qui détermine la circulation.

Il obtient la force par un calcul assez laborieux qui utilise à la fois l'intégrale de POISSON et le calcul des résidus.

6) - En 1929, KUSSNER [21] reprend l'étude du même problème en utilisant la méthode de BIRNBAUM, mais obtient des développements en série qui convergent pour de plus grandes valeurs de la pulsation.

Il examine de plus le cas d'un profil déformable et celui d'une aile en mouvement stationnaire qui, à un instant donné, subit une brusque variation de vitesse. Bien entendu, dans la déformation précédente, l'aile reste infiniment voisine du segment de droite.

7) - En 1938, ELLENBERGER [9] reprend les travaux de WAGNER. Il ajoute à l'aile un aileron. Les hypothèses sont toujours celles de BIRNBAUM.

Il détermine d'abord la représentation conforme approximative de l'aile et sa gouverne (réduite à 2 segments de droite) sur un cercle, calcule la partie réelle du potentiel par la formule de POISSON et complète son calcul par la méthode des résidus.

La partie réelle du potentiel est de la forme :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

φ_1 est relatif à la translation de l'aile,

φ_2 " " rotation "

φ_3 " " " de la gouverne par rapport à l'aile.

φ_4 " " file de tourbillons.

Il applique les formules trouvées :

1° - au cas de l'aile sans gouverne,

2° - au cas du mouvement stationnaire de l'aile avec gouverne,

3° - au cas des vibrations harmoniques de l'aile.

Enfin MULLER [28] étudie le mouvement non uniforme d'un corps cylindrique tournant et subissant des accélérations. Il établit, par le calcul vectoriel, des formules valables dans le cas d'un mouvement irrotationnel d'un corps mobile dans l'espace.

L'auteur applique ses formules à l'étude de l'hélice et au cas du mouvement plan; mais il laisse de côté le profil à pointe anguleuse.

Le mémoire se termine d'ailleurs par cette phrase :

"Dans la documentation technique allemande, le problème des profils à points anguleux n'a pour ainsi dire jamais été sérieusement considéré".

En ITALIE, CICCALA [4] résume les travaux faits sur l'aile mince, voisine d'un segment de droite, animé d'un mouvement voisin d'une translation dont la vitesse fait un angle petit avec la vitesse d'un point quelconque de l'aile.

C'est l'étude du problème de BIRNBAUM, dans lequel l'auteur utilise les développements de FOURIER pour calculer la circulation et ne se limite plus aux vibrations harmoniques.

Il ressort du rapide examen que nous venons de faire que, seul le cas particulier de BIRNBAUM semble avoir attiré les chercheurs (mouvements stationnaires mis à part). Nous y voyons deux raisons d'ordres différents. D'abord, l'étude des vibrations d'une aile et des efforts qui en résultent est d'un intérêt pratique immédiat; ensuite, la notion de mouvement à circulation constante plus générale que celle de mouvement stationnaire, ne paraît pas avoir été envisagée par les auteurs précédents; comme nous le verrons (ch. II), un mouvement non stationnaire peut très bien être à circulation constante même si l'on utilise la règle de

JOUKOWSKY pour assurer une vitesse finie à la pointe.

Enfin, l'étude des mouvements à circulation constante conduit tout naturellement à celle des mouvements infiniment voisins dont le mouvement de BIRNBAUM n'est qu'un cas particulier.

Nous nous proposons, dans ce travail, de mettre en équation, le problème du mouvement plan d'un profil en régime non stationnaire, d'étudier complètement les mouvements à circulation constante et de pousser, le plus loin possible, l'étude des mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante.

Dans le chapitre I, nous reprenons rapidement le problème de la détermination de l'écoulement fluide à potentiel pour un profil (c) mobile dans un fluide en repos à l'infini; nous faisons l'application des formules ainsi trouvées à la rotation uniforme, ce qui nous conduit à quelques résultats nouveaux.

(Généralisation de la notion de parabole métacentrique.- Centre des rotations à portance nulle).

Le chapitre II, consacré aux mouvements variés à circulation constante, comporte une étude complète du cas général (détermination des efforts aérodynamiques qui agissent sur le profil); on y trouvera, de plus, l'étude de quelques cas particuliers et surtout, les formules qui concernent les mouvements périodiques à circulation constante.

Le chapitre III débute par la mise en équation du problème général, on y verra que la détermination de l'échappement tourbillonnaire qui résulte de la variation de circulation, dépend de deux équations dont la résolution paraît mal aisée. En essayant de résoudre le système que forment ces deux équations par approximations successives, on est conduit aux mouvements infiniment voisins des mouvements à circulation constante, et on peut voir que, dans ce cas, les tourbillons suivent approximativement les trajectoires fluides du mouvement à circulation constante infiniment voisin, ce qui permet de déterminer la circulation et le sillage tourbillonnaire.

Le chapitre se termine par le calcul des efforts aérodynamiques que nous obtenons en nous plaçant d'abord dans le cas général et, ensuite, en supposant que le mouvement est infiniment voisin d'un mouvement à circulation constante.

Dans le chapitre IV, nous étudierons plus particulièrement l'aile épaisse en mouvement infiniment voisin de la translation à circulation nulle et nous obtenons, pour la force et le moment, des expressions ayant la même forme que celles que THEODORSEN (ou ELLENBERGER) ont établies pour la plaque. Nous montrons que les formules trouvées se prêtent, comme les précédentes, au calcul de la vitesse critique d'une aile et nous terminons par l'étude du cas particulier de la plaque.

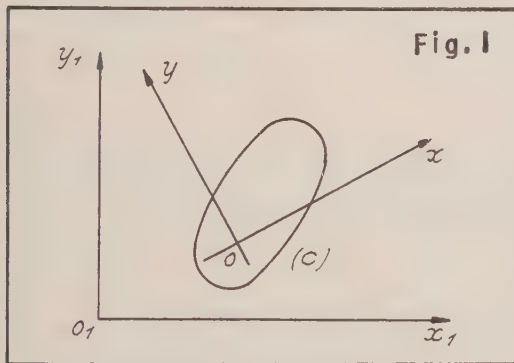
Chapitre I

GENERALITES SUR LES MOUVEMENTS PLANS NON STATIONNAIRES A POTENTIEL DES VITESSES

1° - Enoncé du problème et notations.-

Nous considérons un profil (c) mobile dans un fluide au repos à l'infini.

Le problème de la détermination de l'écoulement fluide correspondant à un potentiel des vitesses, (fluide parfait) est bien connu. Nous rappellerons, dans ce chapitre, les résultats essentiels déjà acquis, en y ajoutant quelques compléments.



Les axes rectangulaires fixes seront désignés par $o_1 x_1, o_1 y_1$ et les axes rectangulaires liés au profil par ox, oy (figure 1).

Il s'agit de calculer la fonction potentiel des vitesses absolues

$$f(z, t) = \varphi(x, y, t) + i \psi(x, y, t)$$

sachant que le profil se déplace d'un mouvement connu caractérisé par la vitesse du point O et la rotation instantanée de xoy par rapport à $x_1 o_1 y_1$. Les projections de la vitesse

de O sur ox et oy seront désignées par l et m , la rotation instantanée par ω . Nous ferons d'abord une remarque :

Si u et v sont deux nombres complexes d'images P et Q , la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ aient le même support est que le produit de u par l'imaginaire conjugué de v soit réel, soit

$$\mathcal{I}(u \cdot \bar{v}) = 0$$

On peut écrire en effet :

$$u = \rho e^{i\varphi} \quad v = \rho_1 e^{i\varphi_1}$$

$$u \bar{v} = \rho \rho_1 e^{i(\varphi - \varphi_1)}$$

qui sera réel si $\varphi - \varphi_1 = k\pi$ condition qui exprime bien que $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ ont même support.

2° - Conditions aux limites.-

La vitesse absolue d'une molécule fluide ayant les composantes u et v sur les axes xoy , on sait que l'imaginaire correspondante est

$$u + i v = \left(\frac{d f}{d z} \right)$$

la vitesse relative au profil sera de même définie par (*)

$$\left(\frac{d f}{d z} \right) = (l + i m) - i \omega z$$

Le long de (c) cette vitesse est co-linéaire à l'élément d'arc $ds = |dz|$ donc :

$$\oint \left\{ \left[\frac{d f}{d z} - (l - i m) + i \omega \bar{z} \right] d z \right\}_c = 0$$

soit

$$\oint \left[d f - (l - i m) d z + i \omega \bar{z} d z \right]_c = 0$$

qui s'intègre, le long du profil, par

$$\oint \left[f - (l - i m) z + i \frac{\omega}{2} z \bar{z} \right] = 0 \quad (1)$$

c'est-à-dire

$$\psi = -m x + l y - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2)$$

formule dans laquelle on néglige une fonction additive de x et de y .

3° - Calcul du potentiel.-

Nous sommes donc ramenés à la recherche d'une fonction $f(z, t)$ analytique en z et caractérisée, à chaque instant, par les conditions suivantes :

- 1° Elle est définie à l'extérieur de (c)
- 2° Sa dérivée est régulière dans le même domaine, y compris le point à l'infini, pour lequel cette dérivée s'annule.
- 3° Sa partie imaginaire ψ prend sur (c) des valeurs données.

On sait que la solution du problème ainsi posé s'obtient simplement en transformant par $z = H(Z)$, (c) en une circonférence (C) de manière que les extérieurs des deux contours se correspondent avec correspondance des deux points à l'infini des deux plans z et Z .

Nous désignerons par a le rayon du cercle (C) de centre O .

La condition (1) devient

$$\oint \left[d F(Z) - (l - i m) d H(Z) + i \omega \overline{H(Z)} d H(Z) \right]_C = 0$$

ou

$$\oint \left[F(Z) - (l - i m) H(Z) + \frac{i \omega}{2} \overline{H(Z)} H(Z) \right]_C = 0$$

(*) Voir J. PERES - Mécanique des fluides page 160.

avec

$$F(Z) = f \left[H(Z) \right]$$

En transformant les valeurs de ψ sur la circonférence (C), on a à résoudre le même problème pour un contour circulaire. Une solution qui correspond au cas d'une circulation nulle autour de l'obstacle est donnée par (*)

$$-\frac{1}{\pi} \int_C \frac{dZ'}{Z' - Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \Psi(Z') \quad (2)$$

où $\Psi(Z')$ est la partie imaginaire de

$$(l - im) H(Z') - \frac{i\omega}{2} \overline{H(Z')} \cdot H(Z')$$

en un point du cercle (C) défini par l'affixe Z' (qui est la variable d'intégration).

Nous noterons $G(Z) = g(z)$ le potentiel complexe défini par l'intégrale (2) réservant les notations $F(Z)$ et $f(z)$ pour le potentiel des mouvements avec circulation que nous aurons aussi à envisager.

Il est clair que l'on a

$$g(z) = l g^{(1)} + m g^{(2)} + \omega g^{(3)}$$

avec

$$g^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \int_C y(Z) \left(\frac{dZ'}{Z' - Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \right) = G^{(1)}(Z) = g^{(1)} \left[H(Z) \right]$$

et des formules analogues pour $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$.

Pour calculer les intégrales précédentes on peut remarquer que sur (C)

$$Z \bar{Z} = a^2$$

a étant le rayon du cercle (C),

et utiliser le développement que $z = H(Z)$ admet à l'extérieur de C et sur C (o étant le centre du profil c).

$$z = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$$

d'où

$$\bar{z} = \frac{a^2}{Z} + \frac{\bar{a}_1}{a^2} Z + \dots + \frac{\bar{a}_n}{(a^2)^n} Z^n + \dots$$

Ce qui donne

$$2x = z + \bar{z} \quad 2iy = z - \bar{z} \quad x^2 + y^2 = z \bar{z}$$

et

$$2x = \dots - \frac{a_n}{Z^n} + \dots + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_1 + a^2}{Z} + \frac{\bar{a}_1 + a^2}{a^2} Z + \dots + \frac{\bar{a}_n}{(a^2)^n} Z^n + \dots$$

$$2iy = \dots - \frac{a_n}{Z^n} + \dots + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_1 - a^2}{Z} - \frac{\bar{a}_1 - a^2}{a^2} Z - \dots - \frac{\bar{a}_n}{(a^2)^n} Z^n + \dots$$

$$x^2 + y^2 = \dots - A_n Z^n + \dots + A_1 Z + A_0 + \frac{A-1}{Z} + \dots + \frac{A-n}{Z^n} + \dots \quad (2 \text{ bis})$$

(*) Voir J. PERES Mécanique des fluides page 162.

avec

$$A_p = \frac{\bar{a}_{p-1}}{(a^2)^{p-1}} + \frac{1}{(a^2)^p} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda} \bar{a}_{p+\lambda}}{(a^2)^{\lambda}} \quad \text{pour } p \geq 1$$

en convenant que $a_0 = 0$

$$A_0 = a^2 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda} \bar{a}_{\lambda}}{(a^2)^{\lambda}} \quad \text{qui entre dans } A_p$$

et $a_{-1} = 1$

$$\text{enfin } A_{-p} = a^2 a_{p-1} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{\lambda} a_{p+\lambda}}{(a^2)^{\lambda}} = (a^2)^p \bar{A}_p \quad \text{pour } p \geq 2$$

$$A_{-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{\lambda} a_{\lambda+1}}{(a^2)^{\lambda}} = a^2 \bar{A}_1$$

Nous avons donc à calculer des intégrales de la forme

$$\int_C \frac{1}{(Z')^q} \left(\frac{dZ'}{Z'-Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \right) \quad \text{avec } q > 0$$

car $q \leq 0$ donnerait zéro.

On trouve $2\pi i R$

R étant le résidu de $\frac{1}{(Z'-Z)(Z')^q}$ pour $Z' = 0$

C'est-à-dire $-\frac{1}{Z^q}$

d'où les expressions pour $g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}$

$$g^{(1)} = \frac{a_n}{Z^n} + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_1 - a^2}{Z} = z - Z - \frac{a^2}{Z}$$

$$g^{(2)} = -i \left(\frac{a_n}{Z^n} + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_1 + a^2}{Z} \right) = -i \left(z - Z + \frac{a^2}{Z} \right)$$

$$g^{(3)} = -i \left(\frac{A_{-1}}{Z} + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right)$$

Le potentiel s'exprime par l'une ou l'autre des formules

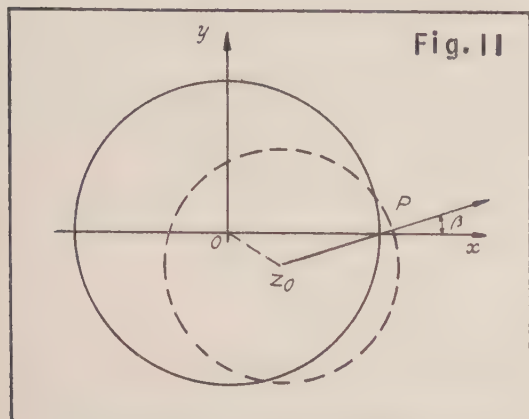
$$\begin{aligned} G(Z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - a^2}{Z} + \frac{a_1}{Z^2} + \frac{a_n}{Z^n} + \dots \right) - i m \left(\frac{a_1 + a^2}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots \right) \\ &\quad - i \omega \left(\frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right) \\ g(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - a^2}{z} + \dots \right) - i m \left(\frac{a_1 + a^2}{z} + \dots \right) - i \omega \left(\frac{A_{-1}}{z} + \dots \right) \end{aligned}$$

puisque

$$Z = z - \frac{a_1}{z} + \dots$$

3.1.- Cas particulier d'un profil Joukowski.-

Prenons pour ox le premier axe du profil et désignons par $Z_0 = r e^{i\varphi}$ l'affixe du centre du cercle auxiliaire qui définit la transformation de Joukowski (figure II).



Nous aurons

$$z = Z + \frac{b^2 e^{2i\beta}}{Z - Z_0}$$

avec

$$a = Z_0 + b e^{i\beta}$$

On a pour les coefficients a_n les expressions suivantes :

$$a_0 = 0 \quad a_{-1} = 1$$

$$a_n = e^{2i\beta} b^2 (Z_0)^{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

qui permettent de calculer les A_n

$$A_0 = a^2 + \frac{b^4}{a^2 - r^2} \quad A_1 = \frac{b^4}{a^2 - r^2} \frac{\bar{Z}_0}{a^2}$$

$$A_n = \frac{b^2}{a^2} e^{-2i\beta} \left(\frac{\bar{Z}_0}{a^2} \right)^{n-2} + \frac{b^4}{a^2 - r^2} \left(\frac{\bar{Z}_0}{a^2} \right)^n \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$A_{-1} = \frac{b^4}{a^2 - r^2} Z_0$$

$$A_{-n} = a^2 b^2 e^{2i\beta} (Z_0)^{n-2} + \frac{b^4}{a^2 - r^2} (Z_0)^n$$

Enfin

$$\frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} a^2 b^2 e^{2i\beta} \frac{(Z_0)^{n-2}}{Z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^4}{a^2 - r^2} \left(\frac{Z_0}{Z} \right)^n$$

ou

$$\frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots = \frac{a^2 b^2 e^{2i\beta}}{Z (Z - Z_0)} + \frac{b^4 Z_0}{(a^2 - r^2) (Z - Z_0)}$$

et finalement

$$G(Z) = l \left(\frac{b^2 e^{2i\beta}}{Z - Z_0} - \frac{a^2}{Z} \right) - i m \left(\frac{b^2 e^{2i\beta}}{Z - Z_0} + \frac{a^2}{Z} \right)$$

$$- i \omega \left[\frac{a^2 b^2 e^{2i\beta}}{Z (Z - Z_0)} + \frac{b^4 Z_0}{(a^2 - r^2) (Z - Z_0)} \right]$$

Pour une plaque de longueur $4a$ $G(Z)$ se réduit à

$$- \frac{2i m a^2}{Z} - i \frac{\omega a^4}{Z^2}$$

On peut ainsi calculer le coefficient de ω en remarquant que

$$x^2 + y^2 = z \bar{z} = H(Z) \overline{H(Z)}$$

et en évaluant l'intégrale correspondante sans utiliser le développement en série de $H(Z)$. Nous n'avons pas conduit le calcul de cette manière car nous aurons besoin des A_n pour évaluer la force et le moment.

3.2.- Existence de la solution trouvée pour $G(Z)$.-

Il suffit que la série de terme général $\left| \frac{n a_n}{Z^n} \right|$ converge sur le cercle (C) pour que les opérations précédentes soient légitimes; de plus, on peut facilement voir que les trois conditions indiquées au § 3 du présent chapitre, et relatives au potentiel, sont remplies.

Dans la plupart des cas usuels la série de terme général $\frac{a_n}{Z^n}$ converge non seulement pour $|Z| \geq a$ mais aussi pour

$$a' < |Z| < a$$

il est alors évident que les séries de termes généraux $\frac{a_n}{Z^n}$, $\frac{A_n}{Z^n}$, $A_n Z^n$ et leurs dérivées convergent dans le domaine

$$a' < |Z| < \frac{a^2}{a'}$$

C'est ce qui se passe dans le cas du profil JOUKOWSKY; a' est alors égal à $|z_0|$.

4° - Cas d'une circulation autour du profil.-

Si $G(Z)$ est une solution de l'équation (1) et $K(Z)$ le potentiel pour un mouvement admettant (C) (supposé fixe) comme ligne de courant, $G(Z) + K(Z)$ est encore solution de la même équation.

On a en effet par hypothèse

$$\mathcal{J} \left[dG - (l - im) dH + i \omega \bar{H} dH \right]_C = 0$$

et

$$\mathcal{J} \left[dK(Z) \right]_C = 0$$

d'où

$$\mathcal{J} \left[d(G+K) - (l - im) dH + i \omega \bar{H} dH \right]_C = 0$$

Pour que la solution soit acceptable il faut, évidemment, que la vitesse à l'infini soit nulle.

On pourra donc ajouter à $G(Z)$ le potentiel relatif à un tourbillon placé au centre de C, de sorte que

$$F(Z) = G(Z) - \frac{i \Gamma}{2 \pi} L Z$$

Γ étant la circulation qui doit garder une valeur constante quel que soit t . Dans le cas contraire, il y aurait échappement tourbillonnaire et le potentiel devrait être modifié en conséquence : nous examinerons cette question au chapitre III.

5° - Mouvement des molécules fluides par rapport au profil.-

La molécule fluide d'affixe z a pour vitesse relative au profil

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\bar{f}}{dz} \right) - (l+im) - i \omega z$$

Soit, en multipliant par dz ,

$$\frac{dz}{dt} \frac{d\bar{z}}{dz} = d\bar{f} - (l+im) d\bar{z} - i \omega z d\bar{z}$$

et puisque le premier membre est réel

$$\mathcal{I} \left[d\bar{f} - (l+im) d\bar{z} - i \omega z d\bar{z} \right]_{\delta} = 0$$

$$\mathcal{R} \left[d\bar{f} - (l+im) d\bar{z} - i \omega z d\bar{z} \right]_{\delta} = \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{z}}{dz}$$

(δ) étant une trajectoire relative de molécule fluide. Les images de ces trajectoires dans le plan du cercle sont définies par

$$\mathcal{I} \left[dF - (l-im) dH + i \omega \bar{H} dH \right] = 0$$

$$\mathcal{R} \left[dF - (l-im) dH + i \omega \bar{H} dH \right] = \frac{dH}{dt} \frac{d\bar{H}}{dH}$$

En général, il faudra éliminer t entre les deux équations précédentes pour avoir l'équation des trajectoires fluides dans le plan mobile : dans le cas particulier où l , m , ω sont des constantes (rotation uniforme) la première équation s'intègre immédiatement par

$$\Psi - \mathcal{I} \left[(l-im) H \right] + \frac{\omega}{2} H \bar{H} = \lambda$$

ou

$$\Psi - l y + m x + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) = \lambda$$

et la deuxième est l'équation horaire du mouvement.

Exemple : Mouvement des molécules fluides dans le cas d'une translation rectiligne et une circulation nulle.

Le potentiel se réduit à

$$l \left(z - Z - \frac{a^2}{Z} \right) - im \left(z - Z + \frac{a^2}{Z} \right)$$

avec

$$l = -V \cos \alpha, \quad m = -V \sin \alpha$$

L'équation définissant le mouvement s'écrit

$$dF = (l-im) dH + \frac{dH}{dt} \frac{d\bar{H}}{dH}$$

Si l'on pose $Z = \rho e^{i\theta}$ et si l'on prend le premier axe en direction de ox , cette équation devient

$$V d \left[\left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \theta \right] + i V d \left[\left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \sin \theta \right] = \frac{dH}{dt} \frac{d\bar{H}}{dH}$$

qui se décompose en

$$d \left[\left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \sin \theta \right] = 0$$

$$V d \left[\left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \theta \right] = \frac{dH}{dt} d\bar{H}$$

La première donne l'équation polaire (bien évidente) des images, dans le plan du cercle, des trajectoires des molécules fluides; la deuxième donne la loi horaire des mouvements correspondants.

On peut remarquer que

$$dH \cdot d\bar{H} = dx^2 + dy^2 = ds^2$$

en désignant par s l'arc d'une courbe du plan du profil. Si cette courbe est précisément la trajectoire fluide envisagée on a

$$V d \left[\left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \theta \right] = \frac{ds^2}{dt}$$

La transformation $z = H(Z)$ définit s comme une fonction de ρ , ce qui permet d'écrire, pour la trajectoire fluide passant par la pointe, ($\theta = 0$) :

$$V dt = \frac{\left(\frac{ds}{d\rho} \right)^2 d\rho}{1 - \frac{a^2}{\rho^2}}$$

où V peut être une fonction de t .

Dans le cas où V est une constante

$$V(t-u) = \varphi(\rho)$$

u désignant l'époque du passage de la molécule fluide au point d'image

$$Z = a$$

On aura d'ailleurs

$$\rho = a + f(t-u) \quad \text{avec } f(0) = 0$$

Dans le cas de la plaque on a pour la ligne en question

$$z = x = V(t-u)$$

c'est-à-dire

$$\rho + \frac{a^2}{\rho} = V(t-u)$$

résultat qui est bien en accord avec ce qui précède.

Enfin, nous signalerons que pour un JOUKOWSKY quelconque, la trajectoire fluide (relative au profil) passant par la pointe, est un arc de cissoïde oblique admettant le premier axe comme asymptote.

Désignons par u et v les composantes de la vitesse sur les axes mobiles, par u_e et v_e les composantes de la vitesse d'entraînement sur les mêmes axes, la pression vaudra

$$p = -\frac{\rho}{2}(u^2+v^2) - \rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - u u_e - v v_e \right] + C(t)$$

ρ étant la densité du fluide et $f = \varphi + i \psi$ le potentiel relatif aux axes mobiles.

On sait (*) que la force est donnée par

$$F = X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz - i\rho(l-im) \int_c df - \rho\omega \int_c \bar{z} d\bar{f} + i\rho \int_c \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} d\bar{z} + \dots$$

$$\dots + \rho \mathcal{A} \left[l' - \omega m - i(m' + \omega l) - \zeta(\omega^2 + i\omega') \right]$$

avec $l' = \frac{dl}{dt}$, $m' = \frac{dm}{dt}$, $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$;

$\mathcal{A}$ étant l'aire du profil et ζ l'affixe de son centre de gravité.

Le moment des forces par rapport à l'origine des axes mobiles est

$$M_o = \mathcal{R} \left[-\frac{\rho}{2} \int_c z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz + \rho(l-im) \int_c z d\varphi - i\rho\omega \int_c z \bar{z} d\varphi - \rho \int_c z \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{z} \right]$$

En vue des applications ultérieures nous transformerons la formule du moment de manière à pouvoir faire le calcul dans le plan des Z .

On peut écrire :

$$\int_c z d\varphi = \int_c z df - i\mathcal{A}(l-\omega\eta) + \mathcal{A}(m+\omega\xi)$$

$$\text{avec } \zeta = \xi + i\eta$$

d'où

$$\int_c z d\varphi = \int_c z df + \mathcal{A}(m-il + \omega\zeta)$$

Le terme $i \int_c z \bar{z} d\varphi$ disparaît puisqu'il est imaginaire pur. En remarquant que

$$\mathcal{R} \int_c z \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{z} = \frac{1}{2} \int_c \frac{\partial \varphi}{\partial t} d(z\bar{z})$$

et que

$$\int_c \frac{\partial \varphi}{\partial t} d(z\bar{z}) \text{ est réel}$$

on peut écrire le quatrième terme sous la forme

...

(*) Voir J. PERES Mécanique des fluides p.169.

$$\Re \int_c z \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{z} = \frac{1}{2} \Re \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d(z \bar{z}) = \frac{1}{2} \Re \int_c \frac{\partial f}{\partial t} d(z \bar{z})$$

En passant au plan du cercle (C) il vient

$$\frac{1}{2} \Re \int_c \frac{\partial F}{\partial t} d \left[H(Z) \cdot \overline{H(Z)} \right]$$

Mais sur (C)

$$Z \bar{Z} = a^2$$

de sorte que

$$\overline{H(Z)} = H_1 \left(\frac{a^2}{Z} \right) \quad \text{avec} \quad H_1(Z) = \bar{H} \left(\frac{a^2}{Z} \right)$$

et la formule du moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 = \Re \left[-\frac{\rho}{2} \int_c \frac{H}{\frac{dH}{dZ}} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ + \rho (l-im) \int_c H dF - \frac{\rho}{2} \int_c \frac{\partial F}{\partial t} d(H \cdot H_1) \right. \\ \left. + \rho \mathcal{A} (l-im) (m-il + \omega \zeta) \right] \end{aligned}$$

7° - La rotation uniforme.-

C'est le cas où l, m, ω sont des constantes, le potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} f(z) = l \left(\frac{a_1 - a^2}{z} + \dots \right) - im \left(\frac{a_1 + a^2}{z} + \dots \right) - i\omega \left(\frac{A-1}{z} + \dots \right) \\ - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(Lz + \frac{\lambda}{z^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

λ étant un coefficient dont nous n'aurons pas à faire usage pour le moment.

Les intégrales qui figurent dans la force se calculent sans difficulté (*) et l'on obtient pour cette dernière

$$F = X + iY = i\rho (l+im) \Gamma + 2\pi\rho i\omega B_1 + \rho \mathcal{A} \left[-\omega m - \zeta \omega^2 + i\omega l \right]$$

avec

$$B_1 = l(a_1 - a^2) - im(a_1 + a^2) - i\omega A_{-1}$$

Les intégrales figurant dans le moment sont

$$\int_c z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz = \int_c z \left(-\frac{B_1}{z^2} + \dots - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right)^2 dz = -\frac{i\Gamma}{2\pi}$$

imaginaire pure qui donne zéro, et

$$\int_c z df = -2\pi i B_1$$

d'où

$$\mathcal{M}_0 = 2\pi\rho \mathcal{I} \left[(l-im) B_1 \right] + \rho \mathcal{A} \omega (l\zeta + m\eta)$$

(*) Voir J. PERES Mécanique des fluides p.170.

8° - Cas d'un profil présentant une pointe.-

En prenant le premier axe du profil dirigé suivant ox l'image de la pointe sera $Z = a$. Nous aurons donc

$$\frac{dz}{dZ} = 0 \text{ pour } Z = a$$

On déterminera la circulation par la condition de Joukowski qui assure une vitesse finie à la pointe,

$$\frac{dF}{dZ} = 0 \text{ pour } Z = a$$

Soit

$$\Gamma = -2\pi i a \left(\frac{dG}{dZ} \right)_{Z=a}$$

Montrons que le deuxième membre de la relation précédente est bien réel, c'est-à-dire que $\left(\frac{dG}{dZ} \right)_{Z=a}$ est une imaginaire pure.

L'équation

$$\int \left[dF - (l-im) dH + i\omega \bar{H} dH \right]_C = 0$$

devient

$$\int \left[\frac{dG}{dZ} dZ \right]_C = 0 \text{ au point } Z = a$$

puisque

$$F = G - \frac{i\Gamma}{2\pi} L Z \quad (3)$$

et

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{dH}{dZ} = 0 \text{ pour } Z = a$$

$\frac{dG}{dZ} dZ$ est donc, au voisinage de $Z = a$, une quantité réelle et comme sur (C) dZ est orthogonal à Z .

$$\left(\frac{dG}{dZ} \cdot Z \right)_{Z=a}$$

est bien imaginaire pure.

Le calcul de Γ se fait en partant de la formule

$$G = l \left(z - Z - \frac{a^2}{Z} \right) - i m \left(z - Z + \frac{a^2}{Z} \right) - i \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{Z^n}$$

On obtient

$$\left(\frac{dG}{dZ} \right)_{Z=a} = 2im + i\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{a^{n+1}}$$

d'où

$$\Gamma = 2\pi a (2m + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{a^{n+1}})$$

soit

$$\Gamma = 4\pi a (m + \omega \Omega)$$

avec

$$\Omega = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{a^n}$$

REMARQUE : Nous venons de faire le calcul de Γ pour un mouvement de rotation uniforme (l, m, ω constants); dans le cas où ces trois quantités sont fonctions du temps, le potentiel trouvé au paragraphe précédent satisfait toujours à la condition (1) et si la quantité $m + \omega \zeta$ reste indépendante du temps le mouvement correspondant admettra bien l'expression (3) comme potentiel des vitesses.

9° - La force et le moment dans le cas de la rotation uniforme d'un profil à pointe

Dans le cas d'une rotation uniforme les formules du § 7 donnent

$$F = i \rho (l + i m) \Gamma + 2 \pi \rho i \omega B_1 + \rho \mathcal{A} [-\omega m - \zeta \omega^2 + i \omega l]$$

$$\mathcal{M}_0 = 2 \pi \rho \mathcal{I} [(l - i m) B_1] + \rho \mathcal{A} \omega (l \xi + m \eta)$$

ce qui permet d'écrire de la manière suivante l'équation du support de la force :

$$\mathcal{I} [2 \pi \rho (l - i m) B_1 + \rho \mathcal{A} \omega i \zeta (l - i m) - (x - i y) \Gamma] = 0$$

en introduisant les coordonnées α, β du centre de rotation,

$$\alpha = -\frac{m}{\omega} \quad \beta = \frac{l}{\omega}$$

cette équation devient

$$\rho \omega \mathcal{I} \left\{ [\alpha - x - i(\beta - y)] [2 \pi i B_1 - \mathcal{A} \omega \zeta + (\alpha + i \beta) (\Gamma + \mathcal{A} \omega)] \right\} = 0$$

avec

$$\Gamma = 4 \pi \alpha \omega (\zeta - \alpha)$$

le profil étant rapporté à son premier axe.

9.1. - Nouvelle expression de la force.-

Si l'on pose

$$a_1 = p + i q$$

$$A_{-1} = P + i Q$$

l'équation du support s'écrit :

$$x f + y g + h = 0$$

avec

$$f = \beta (p - a^2) - \alpha q + Q - \frac{\mathcal{A}}{2 \pi} \eta + \beta \left[\frac{\mathcal{A}}{2 \pi} - 2 \alpha (\alpha - \zeta) \right]$$

$$g = q \beta + \alpha (a^2 + p) - P + \frac{\mathcal{A}}{2 \pi} \xi - \alpha \left[\frac{\mathcal{A}}{2 \pi} - 2 \alpha (\alpha - \zeta) \right]$$

$$h = -(\alpha f + \beta g) = (\alpha^2 - \beta^2) q - 2 p \alpha \beta - (Q - \frac{\mathcal{A}}{2 \pi} \eta) \alpha + (P - \frac{\mathcal{A}}{2 \pi} \xi) \beta$$

Ces formules montrent que la force passe toujours par le centre de rotation (déjà signalé par M. CARAFOLI : "Aérodynamique des ailes d'Avions", page 61).

On remarquera de plus que le support de la force ne dépend pas de ω et que cette dernière prend la forme simple

$$F = 2 \pi \rho i \omega^2 (f + i g)$$

9.2.- Les centres de rotation à portance nulle.-

Les équations $f=0$, $q=0$ sont celles de deux coniques. La première est une hyperbole équilatère ayant un point à l'infini L dans la direction perpendiculaire au premier axe, la deuxième est une parabole admettant L comme point à l'infini.

Ces deux coniques se coupent en trois points, I, J, K à distance finie et au point L.

Il existe donc trois points I, J, K, en général à distance finie, qui donnent une portance nulle.

Le quatrième point L correspond à la translation à circulation nulle. On sait que dans ce cas, les forces agissant sur le profil sont en général équivalentes à un couple.

9.3.- Correspondance entre le centre de rotation et le support de la force.-

La correspondance entre le centre de rotation R et le support (δ) de la force est biunivoque.

Soit en effet

$$u x + v y + w = 0$$

l'équation du support, le point R (α , β) est à l'intersection des coniques

$$(4) \begin{cases} u g - v f = 0 \\ u h - w f = 0 \end{cases}$$

ou encore du support et de la première conique.

$$(5) \begin{cases} u \alpha + v \beta + w = 0 \\ u g - v f = 0 \end{cases}$$

La droite ne coupe la conique qu'en un point à distance finie dont les coordonnées sont données par

$$u \alpha + v \beta + w = 0$$

$$u \left[q \beta + \alpha (a^2 + p) - P + \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \xi \right] - v \left[\beta (p - a^2) - a q + Q - \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \eta \right] + w \left[\frac{\mathcal{A}}{2\pi} - 2 a (\alpha - \xi) \right] = 0$$

Le dénominateur commun de α et β est

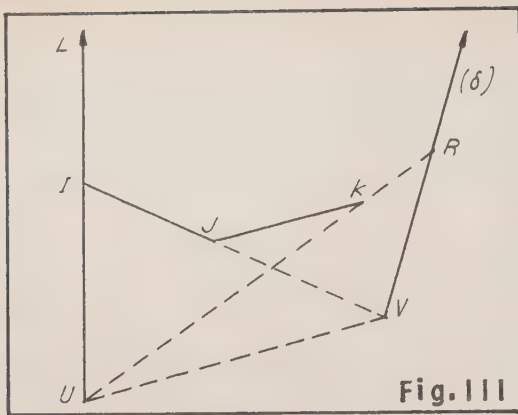
$$q (v^2 - u^2) + 2 p u v - 2 a v w$$

En égalant ce dénominateur à zéro, on retrouve l'équation tangentielle de la parabole métacentrique.

Nous voyons donc qu'à un support donné (δ) ne correspond qu'un centre de rotation R; la correspondance est bien biunivoque.

9.4.- Construction du support de la force et généralisation de la notion de parabole métacentrique.-

Les équations (5) montrent que R est à l'intersection du support et de la conique passant par les points I, J, K à distance finie, par le point à l'infini dans la direction du support et par le point L.



La considération d'un hexagone de Pascal donne immédiatement une construction simple du support connaissant le centre (ou du centre connaissant le support).

Donnons nous R, les droites IL et RK se coupent en U et la droite de Pascal qui passe par ce point est parallèle à JK et rencontre IJ au point V qui appartient à (δ) .

La donnée de (δ) détermine successivement les points V, U et R (fig. III).

Cette construction met en évidence les propriétés de la correspondance :

a) Elle est biunivoque.

b) Si le centre R décrit une droite (Δ) les points V et R se correspondent homographiquement et la droite (δ) enveloppe une conique (γ) tangente à (Δ) et aux côtés du triangle I, J, K. C'est bien là une généralisation de la notion de la parabole métacentrique.

c) Si (Δ) passe par L, (γ) est une parabole; si (Δ) est la droite de l'infini on retrouve la parabole métacentrique.

d) Si (Δ) passe par l'un des trois points I, J, K, le support (δ) enveloppe un point.

e) Si (Δ) passe par deux des trois points I, J, K, le support est la droite déterminée par ces deux points. Corrélativement :

f) Si le support (δ) passe par un point fixe T, les droites R.K. et R.T. se correspondent homographiquement et R décrit une conique qui passe par les quatre points I, J, K, T, etc...

Nous voyons ainsi que I, J, K, est le triangle singulier de la transformation.

Bien entendu les propriétés précédentes restent valables même si deux des trois points I, J, K, sont imaginaires; seule la construction géométrique n'est plus possible.

On pourra se rendre compte en étudiant le cas d'un Joukowsky réduit à son squelette de la réalité des trois points I, J, K, dans les profils usuels; les trois points sont réels tant que l'arc est inférieur à une demi-circonférence.

9.5.- Cas particuliers.-

Pour un profil à centre de portance la parabole $g = 0$ se décompose en deux droites perpendiculaires au premier axe; il ne reste donc plus que deux points J et K à distance finie.

La construction par l'hexagone de Pascal est toujours applicable si l'on remarque que l'un de ses côtés (IL si le point I est à l'infini) devient une asymptote de la conique.

$$u g - v f = 0$$

L'intersection de RK avec cette asymptote donne U; V est sur la parallèle à

Chapitre II

1° - Les mouvements non stationnaires à circulation constante d'un profil à pointe.-

Nous avons vu au § 8 chapitre I (remarque) que la circulation qui assure une vitesse finie à la molécule fluide qui, à l'instant t , passe à la pointe du profil est :

$$\Gamma = 4 \pi a (m + \omega \Omega)$$

Dans les mouvements plans les plus généraux m et ω sont des fonctions de t qui donnent à Γ une valeur variable avec le temps; le théorème de la conservation tourbillonnaire est en défaut, et d'ailleurs la pression devient une fonction multiforme des coordonnées du point correspondant, ce qui correspond évidemment à une impossibilité physique.

Il y a corrélativement aux variations de Γ , échappement de tourbillons à la pointe du profil, tourbillons qui se conservent dans le fluide. Nous examinerons de tels mouvements au chapitre III.

Il existe cependant une assez grande variété de mouvements à Γ constant (et en particulier nul), donc avec un écoulement fluide purement irrotationnel dans d'autres cas que celui d'une rotation (ou translation) uniforme du profil.

L'étude de ces mouvements fait l'objet du présent chapitre; ils sont caractérisés par la relation :

$$m(t) + \omega(t) \Omega = \gamma \quad (8)$$

γ étant une constante donnée égale à $\frac{\Gamma}{4 \pi a}$ de sorte que γ est homogène à une vitesse.

On peut se donner la trajectoire d'un point quelconque du plan du profil et déterminer, à chaque instant, son orientation de manière à satisfaire à la condition (1) du chapitre I.

Soit en effet un point M de coordonnées p, q par rapport aux axes mobiles; si nous désignons par ξ_1 et η_1 les composantes de sa vitesse par rapport aux axes fixes en projection sur ces axes, par ξ et η les composantes de la même vitesse sur xoy on aura :

$$\xi = \dot{p} - \omega q$$

$$\eta = \dot{q} + \omega p$$

la condition (1) se traduira par $\eta - \omega (p - \Omega) = \gamma$

soit :

$$\eta_1 \cos \theta - \xi_1 \sin \theta - \omega (p - \Omega) = \gamma$$

ou

$$-\frac{d\theta}{dt} (p - \Omega) + \eta_1 \cos \theta - \xi_1 \sin \theta - \gamma = 0$$

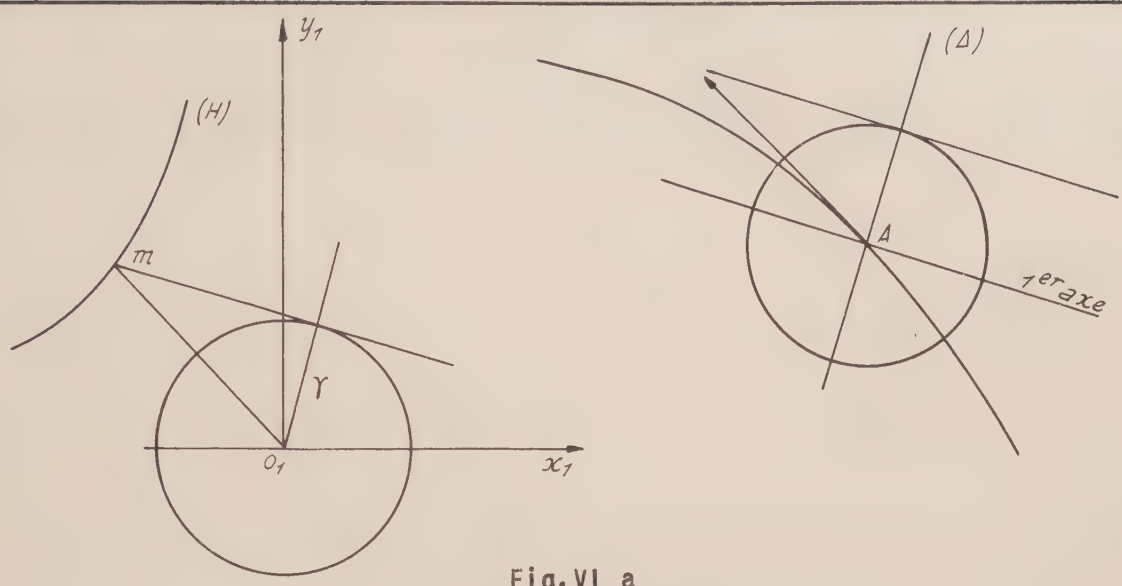


Fig.VI a

Mouvement à circulation constante $\Gamma = 4 \pi a \gamma$

Le point M de la droite (Δ) est ici son point d'intersection avec le 1er axe (H) est l'hodographe du mouvement de A.

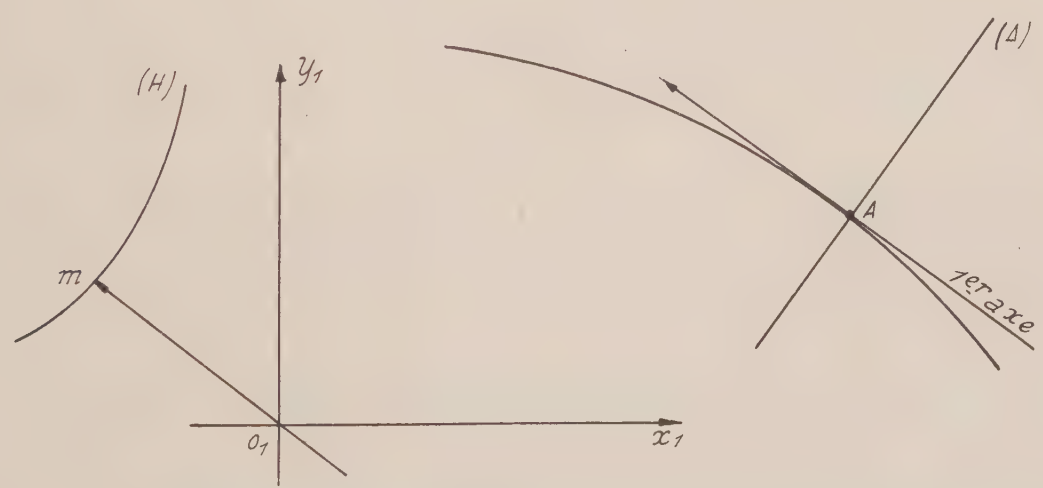


Fig.VI b

Mouvement à circulation nulle

Le point caractéristique A du premier axe est sur la droite (Δ)

Si $\dot{\phi} - \Omega \neq 0$, θ est déterminé par l'équation différentielle précédente, et nous voyons que, le mouvement de M étant donné, il existe une infinité de mouvements non stationnaires correspondant à une circulation Γ également donnée.

Dans le cas particulier où le point M est sur la droite $x = \Omega$, droite invariablement liée au profil, la détermination de θ se fait par une simple équation trigonométrique ($\dot{\phi} = \Omega$)

$$\eta_1 \cos \theta - \xi_1 \sin \theta = \gamma$$

Le mouvement du point M (Ω, q) étant donné, il n'y a donc qu'un nombre fini de mouvements non stationnaires à circulation constante Γ également donnée; il est alors possible de donner une construction géométrique du profil à chaque instant.

2° - Construction géométrique.-

On peut interpréter la condition de Joukowski sous la forme (6) en considérant dans le plan xoy la droite (Δ)

$$x - \Omega = 0$$

parfaitement déterminée par la forme géométrique du profil. La condition (6) exprime que la vitesse d'un point M lié au profil et pris sur la droite (Δ) a une composante sur cette droite (qui ne dépend naturellement pas du point M choisi) indépendante du temps. (Un point de coordonnées (Ω, q) donne, en effet, une vitesse dont la composante sur oy est

$$\eta = m + \omega \Omega$$

Les mouvements en question sont donc caractérisés par la condition que la vitesse de glissement soit constante au contact de (Δ) (liée au profil) et de son enveloppe sur le plan fixe. En particulier, les mouvements à circulation nulle s'obtiennent par roulement sans glissement de (Δ) sur une courbe fixe. Les droites du profil parallèles au premier axe enveloppent alors des courbes parallèles, dont les points caractéristiques sont sur (Δ).

Si l'on se donne le mouvement d'un point M de la droite (Δ), pour chaque position de M, l'orientation du profil sera déterminée par la position correspondante de la droite (Δ). Or on obtient cette droite en joignant M à l'un des points de contact des tangentes, menées par l'extrémité du vecteur vitesse de M, au cercle du centre M et de rayon $\frac{\Gamma}{4\pi a}$.

On peut aussi utiliser l'hodographe par rapport à O, du mouvement de M et le cercle de centre O_1 , et de rayon $\frac{\Gamma}{4\pi a}$.

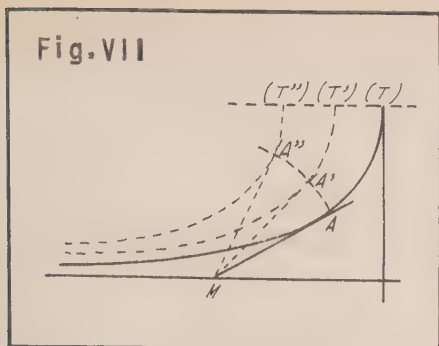
Le premier axe du profil est parallèle à l'une des tangentes issues du point correspondant de l'hodographe au cercle considéré (voir plus haut).

2.1.- Exemple d'une famille de mouvements à circulation nulle.-

Considérons un profil dont un point M du premier axe décrit une droite (D) d'un mouvement d'ailleurs quelconque.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'une circulation nulle correspond à un déplacement du profil dans lequel le premier axe admet pour point caractéristique le point A situé sur la droite (Δ).

Fig.VII



Le lieu de A sera donc une tractrice (T) puisque la longueur M A reste constante. En faisant subir à (T) une translation arbitraire parallèle à (D), on obtiendra tous les mouvements à circulation nulle correspondant au mouvement donné du point M. (fig. VII).

Si le point A (ou d'ailleurs un point déterminé de (D)) décrit (D), il n'y a plus que le seul mouvement de translation à circulation nulle qui réponde à la question.

3° - Calcul de la force et du moment.-

Pour un mouvement à circulation constante Γ , le potentiel peut s'écrire (voir § 3, chapitre I),

$$f[z(Z), t] = F(Z, t) = \frac{B_1}{Z} + \frac{B_2}{Z^2} + \dots + \frac{B_n}{Z^n} + \dots - \frac{i \Gamma}{2\pi} L Z \quad (7)$$

avec

$$B_1 = a_1 (l - i m) - i \omega A_{-1} - a^2 (l + i m)$$

$$B_2 = a_2 (l - i m) - i \omega A_{-2}$$

$$B_n = a_n (l - i m) - i \omega A_{-n}$$

Si l'on reste dans le plan du profil on a :

$$f(z, t) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2 - a_1}{z^2} + \dots - \frac{i \Gamma}{2\pi} L z$$

La formule qui donne la force contiendra d'abord les termes trouvés pour la rotation uniforme (voir § 7 et 9 chap. I), et ensuite ceux provenant de

$$i \rho \int_c \frac{\partial f}{\partial t} dz + \rho \mathcal{A} (l' + i m') + i \zeta \omega'$$

On trouve donc

$$F = X + i Y = i \rho (l + i m) \Gamma + 2 \pi \rho \omega i B_1 + 2 \pi \rho \frac{d B_1}{dt} + \\ + \rho \mathcal{A} [l' + i m' + i \omega (l + i m) + \zeta i \omega' - \zeta \omega^2]$$

Dans la formule du moment, nous aurons de même, en plus des termes trouvés au § 7 chap. I, ceux provenant de l'intégrale

$$- \frac{\rho}{2} \int_c \frac{\partial F}{\partial t} d(H \cdot H_1)$$

En utilisant l'expression (7) du potentiel et la formule (2^{bis}) du paragraphe 3 chapitre I, cette intégrale s'écrit :

$$-\frac{\rho}{2} \int_C \left(\frac{1}{z} \frac{dB_1}{dt} + \dots + \frac{1}{z^n} \frac{dB_n}{dt} + \dots \right) \left(\dots n A_n z^{n-1} + \dots + A_1 \frac{A_{-1}}{z^2} \dots - \frac{n A_{-n}}{z^{n+1}} \dots \right) dz$$

et donne

$$- \pi i \rho \left(A_1 \frac{dB_1}{dt} + \dots + n A_n \frac{dB_n}{dt} + \dots \right)$$

Le moment, par rapport à O, a donc pour expression :

$$M_o = \pi \rho \mathcal{I} \left[2 (l - i m) B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} \right]$$

$$+ \rho \mathcal{A} \mathcal{R} (l - i m) (m - i l + \omega \xi)$$

Soit :

$$M_o = \pi \rho \mathcal{I} \left[2 (l - i m) B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} \right] + \rho \mathcal{A} \omega (l \xi + m \eta)$$

3. 1. - Cas de la plaque. -

La plaque ($-2a \leq x \leq +2a$) considérée comme un profil symétrique très mince et légèrement arrondi au bord d'attaque $x = -2a$ correspond à un profil Joukowski pour lequel $z_o = 0$.

On obtient alors pour les différents coefficients entrant dans la force et le moment

$$a_1 = a^2 \quad a_2 = \dots = a_n = \dots = 0$$

$$A_{-1} = A_{-3} = \dots = A_{-n} = 0 \quad A_{-2} = a^4 \quad A_2 = 1$$

$$B_1 = -2 a^2 i m \quad B_2 = -i \omega a^4$$

$$B_3 = \dots = B_n = \dots = 0$$

d'où

$$F = X + i Y = 4 \pi a \rho i \left(l m + \frac{a^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \right) - 4 \pi a \rho m^2 + 4 \pi i a^2 \rho l \omega$$

$$M_o = -4 \pi a^2 \rho \left(l m + \frac{a^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \right)$$

compte tenu de la valeur de la circulation :

$$\Gamma = 4 \pi a (m + a \omega).$$

Ces formules montrent que l'action du fluide sur la plaque est équivalente à deux forces : la première de composantes

$$0, 4 \pi a \rho \left(l m + \frac{a^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \right)$$

appliquée au quart avant $x = -a$

la deuxième de composantes

$$-4 \pi a \rho m^2, 4 \pi a^2 \rho l \omega + 2 \pi a^3 \rho \frac{d\omega}{dt}$$

passant par l'origine (centre de la plaque).

La force fait donc toujours un angle aigu avec la plaque orientée vers le bord avant.

3.2.- La translation à circulation constante.-

Pour que le profil soit animé d'un mouvement de translation, il faut que le premier axe garde une direction constante, donc que l'hodographe du mouvement soit une droite (D). La circulation vaudra alors

$$\Gamma = 4 \pi a \gamma$$

γ étant la distance du point O_1 centre de l'hodographe à la droite (D).

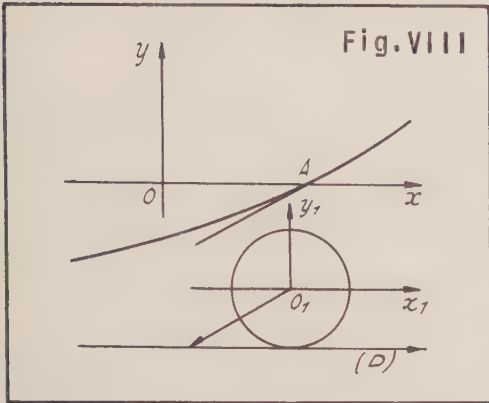
En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de O par rapport aux axes fixes x_1, y_1 on aura

$$l = \frac{dx_0}{dt} \quad m = \frac{dy_0}{dt} \quad \omega = 0$$

la condition (6) devient

$$m = \gamma \quad \text{ou} \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

et montre que le déplacement de profil, perpendiculairement au premier axe, est uniforme (Fig. VIII).



La force et le moment ont pour expressions :

$$F = i \rho (l + im) \Gamma + 2 \pi \rho \frac{dB_1}{dt} + \rho \mathcal{A} \frac{dl}{dt}$$

$$\mathcal{M}_0 = \pi \rho \mathcal{I} \left[2 (l - im) B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} \right]$$

avec :

$$B_1 = a_1 (l - im) - a^2 (l + im)$$

$$B_2 = a_2 (l - im)$$

$$B_n = a_n (l - im)$$

$$\frac{dB_1}{dt} = (a_1 - a^2) \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dB_2}{dt} = a_2 \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dB_n}{dt} = a_n \frac{dl}{dt}$$

ce qui donne :

$$F = i \rho (l + im) \Gamma + 2 \pi \rho (a_1 - a^2 + \frac{\mathcal{A}}{2\pi}) \frac{dl}{dt}$$

$$\mathcal{M}_0 = \pi \rho \mathcal{I} \left[2 a_1 (l - im)^2 + \frac{dl}{dt} (-a^2 A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n A_n) \right]$$

L'expression du moment se réduit encore, si l'on remarque que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n A_n - a^2 A_1 = -\frac{\mathcal{A}\zeta}{\pi}$$

il reste donc

$$\mathcal{M}_0 = \pi \rho \mathcal{I} \left[2 a_1 (l - im)^2 - \frac{\mathcal{A}\zeta}{\pi} \frac{dl}{dt} \right]$$

La quantité $\mathcal{A} + 2 \pi (a_1 - a^2)$ est en général négative; nous poserons donc

$$\mathcal{A} + 2 \pi (a_1 - a^2) = -K^2$$

Nous aurons ainsi à l'instant t , en plus de la force de Joukowsky placée comme dans un mouvement de translation uniforme de vitesse $l + i m$ la force

$$- \rho K^2 \frac{dl}{dt}$$

dont le moment par rapport à l'origine des axes mobiles est :

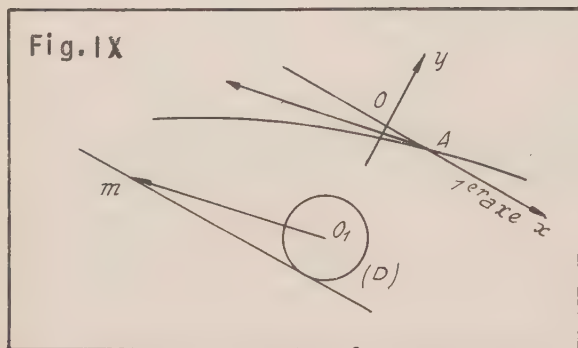
$$- \rho \mathcal{A} \eta \frac{dl}{dt}$$

Cette force passe par l'origine si le profil est symétrique ($\eta = 0$). On peut avoir une idée des forces qui agissent sur le profil dans le cas de l'envol en prenant pour A une trajectoire (C) et un hodographe (D) ayant la forme de ceux de la figure IX. La concavité de la courbe (C) étant tournée vers le bas, le point m de l'hodographe se dirige vers H ce qui prouve

que $\frac{dl}{dt}$ est positive. ($\frac{dl}{dt}$ est en effet

l'accélération du mouvement c'est-à-dire la vitesse du point m). Cette force supplémentaire sera donc dirigée vers le bord d'attaque et ne pourra être négligée que pour des valeurs assez petites de l'accélération.

Fig. IX



3.3.- La plaque en circulation nulle :

Dans un tel mouvement la plaque est tangente à son enveloppe (C) au point si-

tué sur la droite (Δ) d'équation $x = a$. (Δ) roule sans glisser sur la développée (C') de (C) qu'elle touche en un point I qui est le centre instantané de rotation du mouvement de $x_0 y_0$ sur $x_1 y_1$. Les coordonnées de I par rapport aux axes mobiles sont :

$$x = a \quad y = \frac{l}{\omega}$$

Les formules qui donnent la force et le moment deviennent :

$$F = -4 \pi a^3 \rho (\omega^2 - i \frac{d\omega}{dt})$$

$$\mathcal{M}_O = 4 \pi a^3 \rho (l \omega - \frac{a}{2} \frac{d\omega}{dt})$$

$$\text{car} \quad m + a \omega = 0$$

Pour placer la force, cherchons l'équation de son support par rapport aux axes $x_0 y_0$: P (xy) étant un point du support on a :

$$0 = \mathcal{M}_P = \mathcal{M}_O + \vec{F}_\Delta \circ \vec{OP}$$

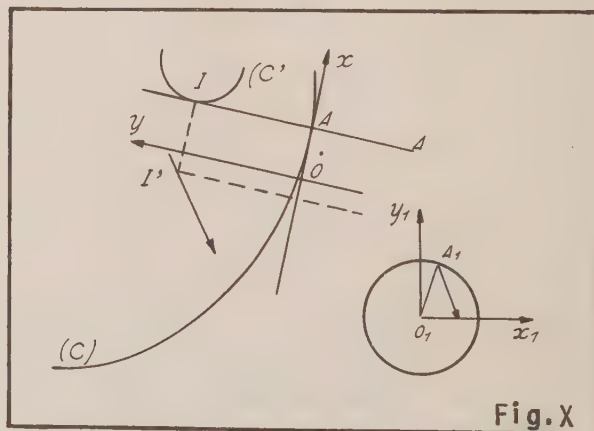


Fig. X

d'où :

$$\omega^2 \left(y - \frac{l}{\omega} \right) + \frac{d\omega}{dt} \left(x + \frac{a}{2} \right) = 0$$

La force passe donc par le point I' d'ordonnée $\frac{l}{\omega}$ et d'abscisse $-\frac{a}{2}$. On pourra la construire en remarquant que :

$$F_1 = -a \omega^2 + i a \frac{d\omega}{dt}$$

est l'accélération du mouvement du point A_1 mouvement dans lequel le vecteur $\overrightarrow{O_1 A_1}$ reste toujours équipollent à $\overrightarrow{OA}$. Il suffira donc de multiplier cette accélération par $4 \pi a^2 \rho$ et de mener par I un vecteur équipollent pour obtenir la force cherchée. Cet exemple permettra d'avoir une idée de l'action des forces aérodynamiques, sur une aile, dans le cas du vol en piqué (voir Fig. X).

4° - Nouvelle expression de la force.- Travail des forces aerodynamiques.-

Si nous rapportons la force aux axes fixes, l'affixe correspondante s'obtiendra en faisant le produit :

$$(X + i Y) e^{i\theta}$$

d'où

$$X_1 + i Y_1 = i \rho \Gamma (l + i m) e^{i\theta} + 2 \pi \rho i \omega B_1 e^{i\theta} + 2 \pi \rho \frac{dB_1}{dt} e^{i\theta} + \rho \mathcal{A} \left[\left(\frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} \right) e^{i\theta} + i \omega (l + i m) e^{i\theta} - \zeta \left(\omega^2 - i \frac{d\omega}{dt} \right) e^{i\theta} \right]$$

soit

$$X_1 + i Y_1 = i \rho (l + i m) e^{i\theta} \Gamma + 2 \pi \rho \frac{d}{dt} (B_1 e^{i\theta}) + \rho \mathcal{A} \frac{d}{dt} \left[(l + i m) e^{i\theta} + \zeta i \omega e^{i\theta} \right]$$

En remplaçant B_1 par $(l - i m) a_1 - (l + i m) a^2 - i \omega A_{-1}$ et observant que :

$$(l + i m) e^{i\theta} = \frac{dx_o}{dt} + i \frac{dy_o}{dt}$$

on obtient :

$$X_1 + i Y_1 = \rho \frac{d}{dt} \left[i \Gamma (x_o + i y_o) + 2 \pi \left(\frac{dx_o}{dt} - i \frac{dy_o}{dt} \right) a_1 e^{2i\theta} + \left(\frac{dx_o}{dt} + i \frac{dy_o}{dt} \right) (\mathcal{A} - 2 \pi a^2) + (\mathcal{A} \zeta - 2 \pi A_{-1}) \frac{d}{dt} (e^{i\theta}) \right]$$

x_o, y_o désignant toujours les coordonnées de O par rapport aux axes fixes. La force moyenne entre les instants t_1 et t_2 vaudra :

$$\frac{\rho}{t_2 - t_1} \left[i \Gamma (x_o + i y_o) + 2 \pi \left(\frac{dx_o}{dt} - i \frac{dy_o}{dt} \right) a_1 e^{2i\theta} + \left(\frac{dx_o}{dt} + i \frac{dy_o}{dt} \right) (\mathcal{A} - 2 \pi a^2) + (\mathcal{A} \zeta - 2 \pi A_{-1}) \frac{de^{i\theta}}{dt} \right]_{t_1}^{t_2}$$

On peut écrire le travail élémentaire des forces aérodynamiques :

$$\mathcal{R} \left[(X+iY) (l-im) + \omega \mathcal{M}_0 \right] dt$$

or

$$(X+iY) (l-im) = i \rho \Gamma (l^2+m^2) + 2 \pi \rho i \omega (l-im) B_1 + 2 \pi \rho (l-im) \frac{dB_1}{dt} \\ + \rho \mathcal{A} (l-im) \left[\frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} + i \omega (l+im) - \zeta (\omega^2 - i \frac{d\omega}{dt}) \right]$$

et

$$\omega \mathcal{M}_0 = - \pi \rho \mathcal{R} \left[2 i (l-im) \omega B_1 + i \omega \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} \right] + \mathcal{R} \rho \mathcal{A} \omega^2 \zeta (l-im)$$

On obtient donc pour le travail élémentaire :

$$\mathcal{R} \left\{ 2 \pi \rho (l-im) \frac{dB_1}{dt} + \rho \mathcal{A} \left[l \frac{dl}{dt} + m \frac{dm}{dt} - \zeta (\omega^2 - i \frac{d\omega}{dt}) (l-im) \right] \right. \\ \left. - \pi \rho i \omega \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} + \rho \mathcal{A} \omega^2 (l-im) \zeta \right\} dt$$

En posant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n A_{-n} = P \text{ nombre réel}$$

et remarquant que :

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n A_n = \pi A_{-1} - \mathcal{A} \zeta$$

on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{dB_n}{dt} = \left(\frac{dl}{dt} - i \frac{dm}{dt} \right) (A_{-1} - \frac{\mathcal{A} \zeta}{\pi}) - a^2 A_1 \left(\frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} \right) - i P \frac{d\omega}{dt}$$

Le travail élémentaire prend donc la forme :

$$\mathcal{R} \left\{ \pi \rho a_1 \frac{d}{dt} (l-im)^2 - \pi \rho a^2 \frac{d}{dt} (l^2+m^2) + \rho \frac{\mathcal{A}}{2} \frac{d}{dt} (l^2+m^2) \right. \\ \left. + \rho i (\mathcal{A} \zeta - 2 \pi A_{-1}) \frac{d}{dt} [\omega (l-im)] - \rho \pi \frac{P}{2} \frac{d\omega^2}{dt} + \right. \\ \left. + \pi \rho i \left[A_{-1} \omega \left(\frac{dl}{dt} - i \frac{dm}{dt} \right) + \omega a^2 A_1 \left(\frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} \right) \right] \right\} dt$$

le dernier crochet disparaît, car il est réel en vertu de la relation :

$$\bar{A}_{-1} = a^2 A_1$$

Finalement :

$$dZ = \mathcal{R} \left\{ \pi \rho a_1 d (l-im)^2 + \rho \left(\frac{\mathcal{A}}{2} - \pi a^2 \right) d (l^2+m^2) + \right. \\ \left. + \rho i (\mathcal{A} \zeta - 2 \pi A_{-1}) d [\omega (l-im)] - \frac{\pi \rho}{2} P d \omega^2 \right\}$$

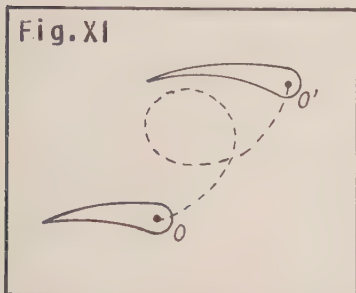
4.1. - Mouvements périodiques à circulation constante. -

Dans ces mouvements nous supposons que x_0 , y_0 sont des fonctions périodiques du temps (période T). Si lorsque t augmente de T, θ croît de $2k\pi$ le profil se

retrouve, après une période, dans les mêmes conditions cinématiques et l , m , ω sont des fonctions périodiques de t de même période.

La force moyenne est nulle si on la calcule pendant une période; le travail des forces aérodynamiques est nul pendant le même temps.

Supposons maintenant que l , m , ω soient des fonctions périodiques du temps (période T) et que les variations de θ , x_0 , y_0 après une période soient $2K\pi$, Δx_0 , Δy_0 (fig. XI). La force moyenne pendant le temps T sera d'après la formule :



$$\frac{\rho}{T} i \Gamma (\Delta x_0 + i \Delta y_0)$$

On voit que $\frac{\Delta x_0}{T}$ et $\frac{\Delta y_0}{T}$ sont les composants de la vitesse moyenne du point O de sorte que si V_0 désigne l'affixe de cette vitesse on a pour la force moyenne :

$$\rho i \Gamma V_0$$

ce qui généralise la formule de Joukowsky. On peut remarquer que pour un point du profil, autre que o , on obtient la même formule; si nous désignons en effet par p et q les coordonnées de ce point par rapport aux axes mobiles et par x_1 , y_1 les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes nous aurons :

$$x_1 = x_0 + p \cos \theta - q \sin \theta$$

$$y_1 = y_0 + p \sin \theta + q \cos \theta$$

de sorte que :

$$\Delta x_1 = \Delta x_0$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0$$

puisque pendant le temps T les variations de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ sont nulles.

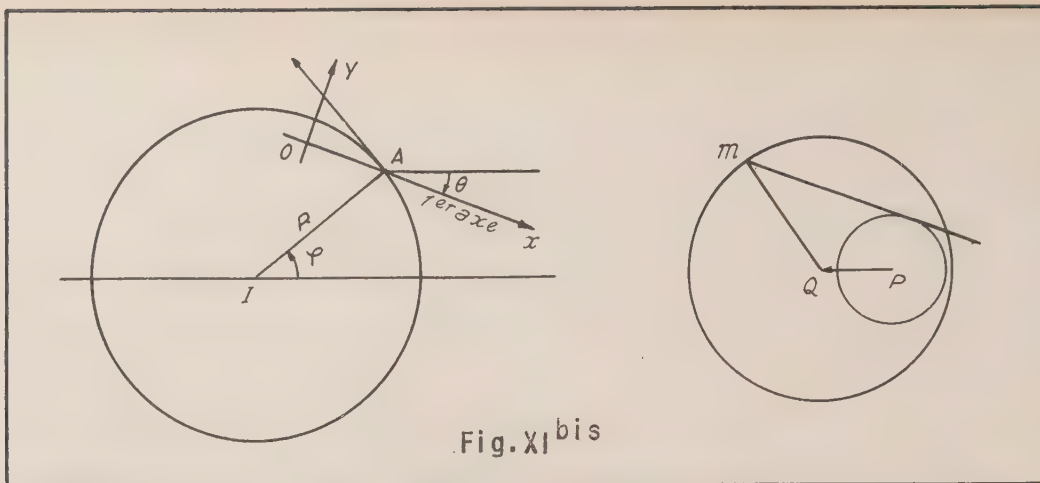
Le travail des forces aérodynamiques pendant une période reste nul, ce qui donne une extension au paradoxe de d'Alembert puisque dans le mouvement de translation uniforme la force ne travaille pas.

4.2. - Profil en rotation dans un vent de vitesse constante. -

Nous supposons que le point A , intersection du premier axe du profil et de la droite (Δ) décrit une circonférence de centre I et de rayon R d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire K tandis que la vitesse constante du courant d'air est égale à v .

Nous supposons que le profil se déplace dans l'air au repos à l'infini, et que son mouvement résulte d'une translation de vitesse opposée à celle du vent d'une rotation uniforme autour de I et enfin d'une rotation autour de A destinée à assurer la constance de la circulation.

L'hodographe du mouvement de A par rapport à un point fixe P sera une circonférence de centre Q tel que le vecteur $\vec{PQ}$ soit opposé à la vitesse du vent, et de rayon RK . A chaque instant la direction du premier axe du profil sera déterminée par une tangente menée du point A de l'hodographe correspondant au point A , à la circonférence de centre P de rayon $\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi a}$.

Fig. XI^{bis}

Nous supposons que le mouvement est révolutif donc que :

$$v > R K + \gamma$$

ou

$$v + \gamma < R K \quad (\text{cas de la figure XI bis})$$

La résultante des forces aérodynamiques moyennes pendant une période, se calcule immédiatement en utilisant la formule du paragraphe précédent :

$$\frac{\rho}{T} i \int (\Delta x_0 + i \Delta y_0) = - \rho i \int v$$

Pour calculer la force et le moment à l'instant t , on utilisera les formules:

$$\varphi = K t$$

$$m + \Omega \omega = \gamma = R K \cos (\theta - \varphi) + v \sin \theta$$

qui donneront θ , et on achèvera le calcul à l'aide des expressions suivantes :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{R K^2 \sin (\theta - \varphi)}{R K \sin (\theta - \varphi) - v \cos \theta}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - R K^2 v \frac{\omega \cos \varphi - K \cos \theta \cos (\theta - \varphi)}{(R K \sin (\theta - \varphi) - v \cos \theta)^2}$$

$$l = R K \sin (\theta - \varphi) - v \cos \theta, \quad m = \gamma - a \omega$$

Dans le mouvement auxiliaire que nous avons considéré pour calculer la force, le travail pour une période est nul d'après les résultats du paragraphe 4.1, mais ce n'est pas le travail relatif du mouvement vrai.

Pour calculer ce dernier, il faut retrancher le travail des forces aérodynamiques dans la translation de vitesse opposée à la vitesse du vent.

Le travail élémentaire à retrancher sera :

$$- v (X \cos \theta - Y \sin \theta) dt$$

soit :

$$- v dt \Re (\tilde{X} + i \tilde{Y}) e^{i\theta}$$

ou :

$$- v dt \Re (X_1 + i Y_1)$$

c'est-à-dire une différentielle exacte dont la portée réelle est nulle pendant une période.

Le travail des forces aérodynamiques est donc nul pour une période du mouvement étudié.

Nous allons déterminer complètement la force instantanée dans le cas particulier où le profil se réduit à la plaque, la vitesse du vent étant égale à la vitesse du point A :

$$v = R K$$

Pour déterminer la force, nous reprenons le mouvement auxiliaire de la plaque dans le fluide au repos à l'infini (voir ci-dessus). La construction du 1er axe (plaque), à chaque instant, montre que cette droite passe par le point B le plus haut du cercle de centre H et de rayon R; il est facile de voir, de plus, que ce cercle roule sans glisser sur la tangente $o_1 x_1$ au point B' diamétralement opposé à B.

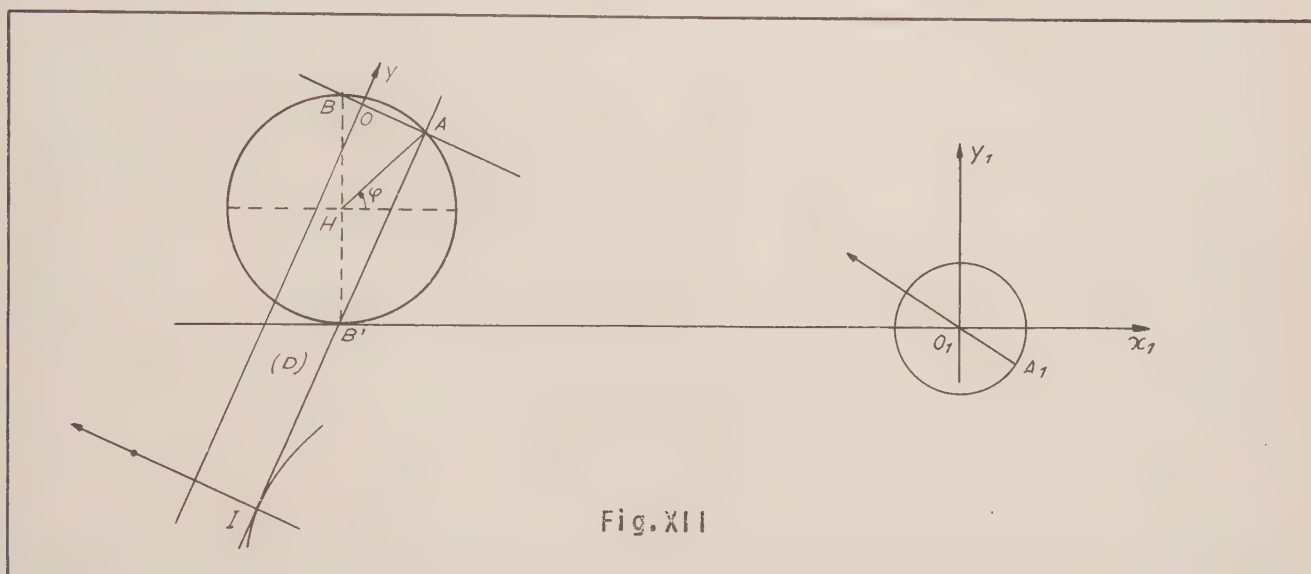


Fig. XII

Le point A décrit donc une cycloïde et le centre de courbure correspondant I est le symétrique de A par rapport à B'. D'après les résultats obtenus au paragraphe 3.3 du présent chapitre, nous savons que la force passe par I' et qu'elle est parallèle à l'accélération du point A₁ obtenu en construisant $\vec{O_1 A_1}$ équipollent à OA. Mais dans le cas particulier qui nous occupe

$$\cos (\theta - \varphi) + \sin \theta = 0$$

soit :

$$2 \theta = \varphi - \frac{\pi}{2} + 2 K \pi$$

Le mouvement de A₁ est donc uniforme et son accélération est dirigée vers le point O₁. La force est donc, à chaque instant, parallèle à la plaque et dirigée vers le bord d'attaque. Son intensité vaut :

$$\pi \rho a^3 K^2$$

Dans le cas où v est grand par rapport à la vitesse de rotation, le mouvement auxiliaire que nous avons introduit précédemment, est celui d'une aile vibrante en translation uniforme.

De semblables mouvements ont fait l'objet de nombreux travaux, mais leurs auteurs étaient obligés de se restreindre aux profils minces à circulation voisine de zéro, car les mouvements non stationnaires qu'ils utilisaient n'étaient pas à circulation constante et nécessitaient un échappement tourbillonnaire. Nous reviendrons sur de tels mouvements au chapitre III.

4.3.- Rotation accélérée d'une plaque.-

Nous supposons que le point A ($x = a$) de la plaque décrit un cercle (O,R) d'un mouvement accéléré; si la plaque reste tangente au cercle le mouvement sera à accélération nulle. Nous prendrons (Fig. XIII)

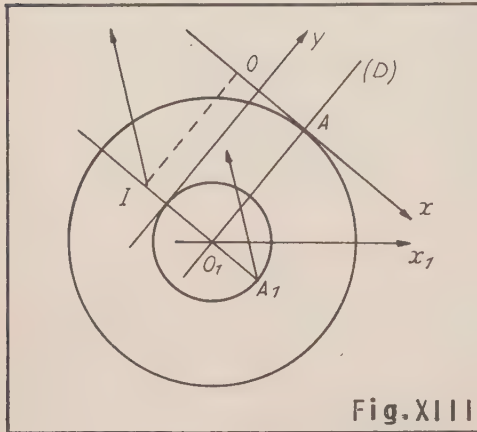


Fig. XIII

$$\varphi = K t^2$$

de sorte que :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\varphi \frac{\pi}{2} \right) = 2 K t$$

La force instantanée passera par le point I symétrique de O_1 par rapport à la droite $x = \frac{a}{4}$,

et sera le produit par $4 \pi \rho a^2$ de l'accélération du point A_1 ($O_1 A_1$ équipollent à OA). La force moyenne se calcule en utilisant les formules du paragraphe 4; on a ici :

$$\frac{\rho}{t_2 - t_1} \left[2 \pi a^2 \left(\frac{dx_0}{dt} - i \frac{dy_0}{dt} \right) e^{2i\theta} - 2 \pi a^2 \left(\frac{dx_0}{dt} + i \frac{dy_0}{dt} \right) \right]_{t_1}^{t_2}$$

avec

$$\begin{aligned} x_0 &= R \cos \varphi - a \sin \varphi \\ y_0 &= R \sin \varphi + a \cos \varphi \\ \theta &= \varphi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

en remplaçant x_0 et y_0 par leurs valeurs il vient :

$$\frac{4 \pi a^2 \rho i}{t_2 - t_1} \left[a \sin (\varphi - \theta) \frac{d\varphi}{dt} e^{i\theta} \right]_{t_1}^{t_2}$$

soit pour un tour :

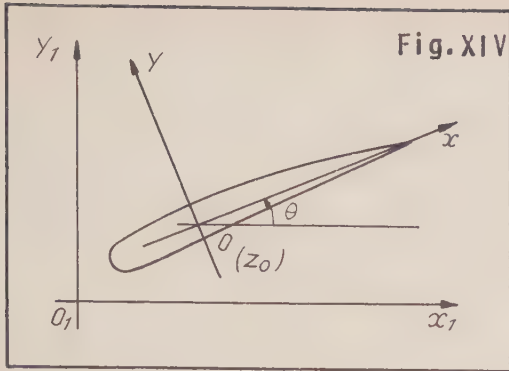
$$\frac{4 \pi a^3 \rho i e^{i\theta}}{t_2 - t_1} 2 K (t_2 - t_1) = 8 \pi a^3 \rho K i e^{i\theta}$$

θ étant l'angle correspondant à la position A_0 du point de départ; la force moyenne fait donc l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec le rayon $O_1 A_0$.

5° - Aile en mouvement non stationnaire dans un courant.-

Nous supposons donné le mouvement du fluide par rapport aux axes fixes et nous désignerons par $f_1(z_1, t)$ le potentiel correspondant (Fig. XIV).

En axes mobiles, le potentiel absolu peut s'écrire :



$$f(z, t) = f_1 [z_0 + z e^{i\theta}, t]$$

z_0 étant l'affixe de o .

Le courant, modifié par la présence du profil, pourra se caractériser par un potentiel :

$$f(z, t) + k(z, t)$$

La condition aux limites donne :

$$\mathcal{I} [df + dk - (l-im) dz + i \omega \bar{z} dz]_c = 0$$

z_0, θ (ou l, m, ω) caractérisant le mouvement du profil c . En passant par $z = H(Z)$ du profil à une circonférence (C) de centre o et de rayon a il vient :

$$\mathcal{I} [dF(Z) + dK(Z) - (l-im) dH + i \omega \bar{H} dH]_c = 0$$

soit

$$\mathcal{I} [F(Z)] = -\psi - mx + ly - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2)$$

qui donnera :

$$F(Z, t) = \frac{1}{\pi} \int_c \left(\frac{dZ'}{Z' - Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \right) \left[\psi + mx - ly + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) \right] - \frac{i}{2\pi} \Gamma L Z$$

Γ sera toujours déterminée par la condition de Joukowski ce qui donne, puisque la direction du premier axe est ox

$$\Gamma = 2a \frac{d}{dZ} \left\{ \int_c \left(\frac{dZ'}{Z' - Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \right) \psi + \int_c \left(\frac{dZ'}{Z' - Z} - \frac{dZ'}{2Z'} \right) \left[mx - ly + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) \right] \right\}_{Z=a}$$

On peut transformer la première intégrale de manière à la faire porter sur des fonctions analytiques (voir J. Pères : "calcul de la circulation autour d'un profil" livre jubilaire de M. Brillouin).

On obtient ainsi :

$$- \Re \left(2a \int_c \frac{dF}{Z' - a} \right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\Gamma = \Re \left(2a \int_c \frac{dF(Z')}{a - Z'} \right) - m \int_c \frac{2a dx}{a - Z'} + l \int_c \frac{2a dy}{a - Z'} - \omega \int_c \frac{a d(x^2 + y^2)}{a - Z'}$$

L'expression de Γ présente des simplifications qui apparaissent immédiatement en supposant le fluide au repos. La valeur de la circulation est alors :

$$4\pi a (m + \omega \Omega)$$

La première intégrale étant nulle $[F(Z') = 0]$ il vient :

$$\int_c \frac{2a dx}{a - Z'} = -4\pi a$$

...

$$\int_C \frac{2a \, dy}{a-Z'} = 0$$

$$\int_C \frac{a \, d(x^2+y^2)}{a-Z'} = -4\pi a \Omega$$

On a donc en général :

$$\Gamma = \mathcal{R} \left(2a \int_C \frac{dF(Z')}{a-Z'} \right) + 4\pi a (m + \omega \Omega)$$

de plus on obtient le coefficient Ω sous la forme d'une intégrale (voir § 8, chap. I),

$$\Omega = -\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{d(x^2+y^2)}{a-Z'} = -\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{d(H.\bar{H})}{a-Z'}$$

Un mouvement du type précédent sera à circulation constante si :

$$m + \omega \Omega + \frac{1}{2\pi} \mathcal{R} \int_C \frac{dF(Z')}{a-Z'} = \gamma$$

γ étant une constante arbitrairement donnée (homogène à une vitesse). Prenons en exemple la plaque $(-2a \leq x \leq +2a)$ se déplaçant dans un courant dont le potentiel est :

$$f_1 = \frac{V}{a} z_1^2$$

V étant une vitesse donnée, nous aurons :

$$f = \frac{V}{a} (z_0 + z e^{i\theta})^2$$

ou en passant au plan du cercle (C) par $z = Z + \frac{a^2}{Z}$

$$F(Z) = \frac{V}{a} \left[z_0 + \left(Z + \frac{a^2}{Z} \right) e^{i\theta} \right]^2$$

et

$$dF = \frac{2V}{a} \left[z_0 + \left(Z + \frac{a^2}{Z} \right) e^{i\theta} \right] \frac{Z^2 - a^2}{Z^2} e^{i\theta} dZ$$

l'intégrale figurant dans la circulation vaudra :

$$-\frac{V}{\pi a} e^{i\theta} \int_C \left[z_0 + \left(Z + \frac{a^2}{Z} \right) e^{i\theta} \right] \frac{Z+a}{Z^2} dZ$$

Le seul pôle de la fonction sous le signe somme étant l'origine de résidu :

$z_0 + a e^{i\theta}$ on trouve :

$$-i \frac{2V}{a} e^{i\theta} (z_0 + a e^{i\theta})$$

dont la partie réelle est :

$$\frac{2V}{a} (y_0 \cos \theta + x_0 \sin \theta + a \sin 2\theta)$$

Dans le courant fluide considéré, les mouvements à circulation constante seront donc caractérisés par

$$m + \omega \Omega + \frac{2}{a} V (y_0 \cos \theta + x_0 \sin \theta + a \sin 2 \theta) = \gamma$$

On peut donner une interprétation assez simple de cette condition : dans le courant fluide non troublé par la présence de la plaque la molécule fluide qui, à l'instant t , occupe la place du point A ($x=a$, $y=0$) de la plaque, est animée d'une vitesse dont la projection sur oy est précisément :

$$- \frac{2}{a} V (x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta + a \sin 2 \theta)$$

que nous désignerons par v .

La condition devient :

$$m + \omega \Omega - v = \gamma$$

Il sera alors facile de construire à chaque instant la position de la plaque si nous nous donnons le mouvement du point A.

Soit à l'instant t la vitesse $\vec{U}$ du point A et celle $\vec{V}$ qu'aurait la molécule fluide coïncidant avec A si la plaque n'existait pas. Construisons (*fig. XV*) la somme géométrique $\vec{O_1 A_1}$ des vecteurs $\vec{U}$ et $-\vec{V}$; la projection de $\vec{O_1 A_1}$ sur la droite (Δ) doit être égale à γ ; il suffira donc de mener de A_1 une tangente au cercle de centre O_1 et de rayon γ pour avoir la direction de la plaque.

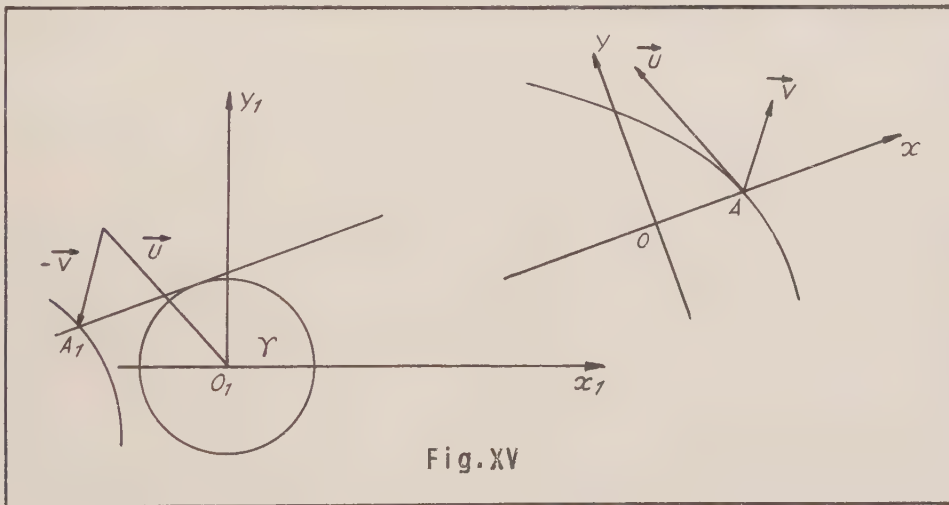


Fig.XV

La construction générale que nous avons donnée au § 2 est donc modifiée, dans ce cas particulier, en remplaçant l'hodographe du mouvement de A par le lieu du point A_1 .

Dans le cas où l'on se donne le mouvement d'un point quelconque du profil, l'orientation de ce dernier est déterminée par l'équation différentielle

$$\Omega \frac{d\theta}{dt} + m + \frac{2}{a} V (y_0 \cos \theta + x_0 \sin \theta + a \sin 2 \theta) = \gamma$$

et les mouvements, en nombre infini, dépendent d'une constante arbitraire.

Chapitre III

ETUDE DU POTENTIEL DANS LE CAS D'UN ECHAPPEMENT TOURBILLONNAIRE CONTINU A LA POINTE DU PROFIL

1° - Nous savons que dans le cas d'un mouvement quelconque d'un profil à pointe, la condition de Joukowski entraîne une variation de la circulation autour du profil et, par conséquent, un échappement de tourbillons à la pointe. Les termes correspondant à ces tourbillons apparaissent dans le potentiel complexe et il y a lieu, d'ailleurs, de tenir compte de leurs mouvements relatifs au profil, ce qui complique notablement la question. Avant d'aborder le cas général, nous examinerons un cas particulier simple.

2° - Mouvement d'un profil sans pointe en présence d'un tourbillon.-

La circulation Γ autour d'un profil sera supposée constante puisque aucune condition de Joukowski ne vient imposer de détermination; le tourbillon de circulation donnée a un affixe, fonction du temps, qui satisfait à une équation que nous obtiendrons en calculant la vitesse du centre tourbillonnaire et en l'égalant à $\frac{dz}{dt}$.

Si nous désignons par α l'affixe du tourbillon de circulation Γ_1 , situé dans le plan du profil (c), la vitesse complexe absolue de ce tourbillon sera

$$\lim_{z=\alpha} \left[\frac{df}{dz} + \frac{i}{2\pi} \Gamma_1 \frac{1}{z-\alpha} \right]$$

$f(z)$ étant le potentiel absolu. La vitesse relative complexe sera :

$$\lim_{z=\alpha} \left[\frac{df}{dz} + \frac{i}{2\pi} \Gamma_1 \frac{1}{z-\alpha} \right] - (l-im) + i \omega \bar{\alpha}$$

Calculons cette vitesse en fonction de Z , $[z=H(Z)]$. Si nous désignons par ζ l'affixe de l'image du tourbillon dans le plan du cercle (C), il vient :

$$\lim_{z=\zeta} \left[\frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} + \frac{i}{2\pi} \Gamma_1 \frac{1}{H(Z)-H(\zeta)} \right] - (l-im) + i \omega \overline{H(\zeta)}$$

$$\text{avec} \quad \alpha = H(\zeta)$$

Le potentiel $F(Z)$ étant de la forme

$$C_{\Gamma}(Z) = i \frac{\Gamma + \Gamma_1}{2\pi} L Z - \frac{i \Gamma_1}{2\pi} L \frac{Z - \zeta}{Z - \zeta'}$$

où

$$\zeta \bar{\zeta}' = a^2$$

nous l'écrivons :

$$P(Z) = \frac{i \Gamma_1}{2\pi} L \frac{Z - \zeta}{Z - \zeta'}$$

la vitesse du tourbillon sera :

$$\left[-(l-im) + i \omega \bar{H} + \frac{dP}{dH} \right]_{Z=\zeta} + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \lim_{Z=\zeta} \left[\frac{1}{H(Z) - H(\zeta)} - \frac{d}{dZ} \left(L \frac{Z - \zeta}{Z - \zeta'} \cdot \frac{1}{\frac{dH}{dZ}} \right) \right]$$

soit :

$$-(l-im) + i \omega \bar{H}(\zeta) + \left[\left(\frac{dP}{dZ} + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{Z - \zeta'} \right) \frac{1}{\frac{dH}{dZ}} \right]_{Z=\zeta} + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \lim_{Z=\zeta} \left[\frac{1}{H(Z) - H(\zeta)} - \frac{1}{Z - \zeta'} \cdot \frac{1}{\frac{dH}{dZ}} \right]_{Z=\zeta}$$

Un calcul facile montre que le dernier crochet a pour limite

$$\frac{1}{2} \frac{H'' \zeta^2}{(H' \zeta)^2}$$

La vitesse cherchée sera donc :

$$-(l-im) + i \omega \bar{H}(\zeta) + \left[\left(\frac{dP}{dZ} + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{Z - \zeta'} \right) \frac{1}{\frac{dH}{dZ}} \right]_{Z=\zeta} + \frac{i \Gamma_1}{4\pi} \frac{H'' \zeta^2}{(H' \zeta)^2}$$

En rétablissant les notations z et Z pour définir les positions du tourbillon et de son image, l'équation définissant le mouvement de l'image dans le plan de (C) sera :

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = -(l-im) + i \omega \bar{H}(Z) + \left(\frac{dP}{dZ} + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{Z - Z'} \right) \frac{1}{\frac{dH}{dZ}} + \frac{i \Gamma_1}{4\pi} \frac{H'' Z^2}{(H' Z)^2}$$

avec $Z \bar{Z}' = a^2$

En écrivant cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{dH}{dt} \frac{d\bar{H}}{dH} = -(l-im) dH + i \omega \bar{H} dH + dP + \frac{i \Gamma_1}{4\pi} \frac{H'' Z^2}{(H' Z)^2} dH + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{dZ}{Z - Z'}$$

on voit qu'elle se subdivise en deux :

$$\mathcal{I} \left[-(l-im) dH + i \omega \bar{H} dH + dP + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{dZ}{Z - Z'} + \frac{i \Gamma_1}{4\pi} \frac{H'' Z^2}{(H' Z)^2} dH \right] = 0$$

$$\mathcal{R} \left[-(l-im) dH + i \omega \bar{H} dH + dP + \frac{i \Gamma_1}{2\pi} \frac{dZ}{Z - Z'} + \frac{i \Gamma_1}{4\pi} \frac{H'' Z^2}{(H' Z)^2} dH \right] = \frac{dH \cdot d\bar{H}}{dt}$$

Dans le cas particulier où l , m , ω , sont des constantes, la première équation s'intègre facilement; en posant :

$$P = \Phi + i \psi \quad Z = \rho e^{i\theta} \quad z = x + iy$$

on obtient :

$$-l dy + m dx + \frac{\omega}{2} d(x^2 + y^2) + d\Psi + \frac{\Gamma_1}{2\pi} \mathcal{R} \frac{dz}{z-z'} + \frac{\Gamma_1}{8\pi} \mathcal{R} d L H'_z = 0$$

qui donne l'équation de la trajectoire :

$$-ly + mx + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \psi + \frac{\Gamma_1}{8\pi} L (\rho^2 - a^2) \left| H'_z \right| = C^{te}$$

où x, y, ψ, H'_z s'expriment en fonction de ρ et θ .

La deuxième équation détermine alors la loi horaire par une quadrature.

3° - Les équations dont dépend le problème dans le cas général.-

Dans le cas où l, m, ω sont des fonctions quelconques du temps, la formule obtenue au § 8 du chapitre I

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} = \dot{Z}_p \left(\frac{dG}{dZ} \right)_{Z=Z_p}$$

ne donne plus pour Γ une valeur constante. Il est alors inadmissible de prendre pour potentiel complexe :

$$F(Z) = G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} L Z$$

A toute variation $d\Gamma$ de la circulation autour du profil, correspond l'échappement, à la pointe, d'un tourbillon de circulation $-d\Gamma$, lequel sera entraîné par le mouvement fluide. Pour écrire le potentiel complexe, il faudra tenir compte de ces tourbillons libres dont les positions sont à priori inconnues.

Considérons les images des tourbillons dans le plan du cercle (C), la trajectoire de l'un de ces tourbillons $M(\zeta)$ est différente, en général, du lieu des divers tourbillons à un instant t , de sorte qu'il faudra considérer ζ comme une fonction de deux variables u et t , u étant l'époque d'apparition du tourbillon : ($t \geq u$).

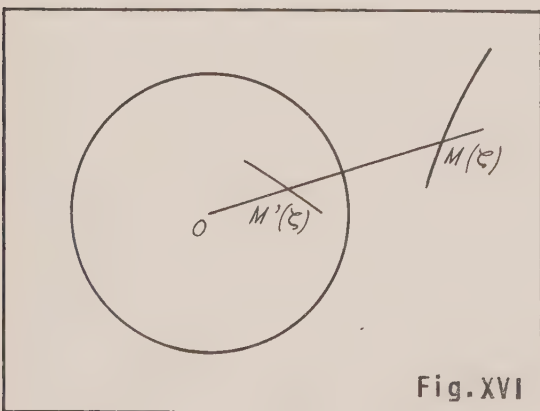


Fig. XVI

Pour remplir les conditions sur le profil, il faut envisager aussi les images $M'(\zeta')$ des tourbillons précédents par rapport au cercle (C), avec

$$\zeta \bar{\zeta}' = a^2$$

et on aura donc à considérer à chaque instant deux courbes tourbillonnaires, lieux des points d'affixes ζ et ζ' (inverses par rapport au cercle (C) (fig. XVI).

Si la circulation autour du profil commence à varier à l'époque t_0 , on aura à un instant suivant le potentiel complexe :

$$G(Z, t) = \frac{i\Gamma_0}{2\pi} L Z + \frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t L \frac{Z - \zeta(u, t)}{Z - \zeta'(u, t)} d\Gamma(u)$$

En effet, si pendant un intervalle de temps du ($t_0 < u < t$) la circulation Γ , autour du profil, a varié de $d\Gamma$ on a, à l'instant t , les circulations $-d\Gamma(u)$ en $\zeta(u, t)$ et $+d\Gamma(u)$ en $\zeta'(u, t)$.

Dans l'expression précédente du potentiel complexe interviennent les deux fonctions inconnues :

$$\Gamma(u) \text{ et } \zeta(u, t)$$

que l'on doit déterminer en tenant compte, d'une part de la condition de Joukowski à remplir à la pointe du profil, et d'autre part, de ce que les tourbillons libres sont soumis au mouvement fluide défini par le potentiel complexe qui précède.

La condition de Joukowski donne immédiatement l'équation :

$$\frac{dG}{dZ} - \frac{i \Gamma_0}{2\pi Z} + \left[\frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) \right]_{Z=a} = 0$$

dans laquelle i disparaît, tous les termes étant des imaginaires pures.

En écrivant que les tourbillons sont soumis au potentiel complexe $f(z, t)$ on obtient :

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = - (l - im) + i \omega \bar{\alpha} + \lim_{z=\alpha} \left[\frac{df}{dz} + \frac{i\gamma}{2\pi} \frac{1}{z - \alpha} \right]$$

$\alpha(\tau, t)$ étant l'affixe dans le plan du profil, du tourbillon apparu à une époque τ comprise entre t_0 et t_1 , γ étant l'intensité tourbillonnaire correspondante qui vaut :

$$\gamma = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} d\Gamma(u)$$

ε étant infiniment petit.

En passant au plan (Z) , la vitesse précédente s'écrit :

$$- (l - im) + i \omega \bar{H}(\zeta) + \lim_{z=\zeta} \left[\frac{dF}{dH} + i \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{H(Z) - H(\zeta)} \right]$$

ou :

$$\left[- (l - im) + i \omega \bar{H}(Z) + \frac{dG}{dH} - \frac{i \Gamma_0}{2\pi Z} \frac{dZ}{dH} \right]_{Z=\zeta(\tau, t)} + \lim_{z=\zeta(\tau, t)} \left[\frac{i}{2\pi} \frac{dZ}{dH} \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right) d\Gamma(u) + \frac{i}{2\pi} \frac{\gamma}{H(Z) - H[\zeta(\tau, t)]} \right]$$

Calculons la limite de la deuxième partie : elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \lim \frac{i}{2\pi} \frac{dH(\zeta)}{d\zeta} \left[\int_{t_0}^{\tau-\varepsilon} \left(\frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta(u, t)} - \frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta'(u, t)} \right) d\Gamma(u) \right. \\
& + \int_{\tau+\varepsilon}^t \left[\frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta(u, t)} - \frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) \\
& \left. + \lim \frac{i}{2\pi} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left[\frac{dZ}{dH} \left(\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right) - \frac{1}{H(Z) - H[\zeta(\tau, t)]} \right] d\Gamma(u) \right]
\end{aligned}$$

La dernière limite doit être prise en faisant tendre Z vers $\zeta(\tau, t)$ puis ε vers zéro.

Un calcul déjà signalé au § 2 du présent chapitre montre que le dernier crochet reste fini quand Z tend vers $\zeta(\tau, t)$ et par conséquent, quand ε tend vers zéro, la dernière intégrale disparaît.

Il reste donc pour la vitesse relative complexe du tourbillon :

$$-(l-im) + i\omega \bar{H}(Z) + \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \frac{dZ}{dH} + \frac{i}{2\pi} \frac{dZ}{dH} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u)$$

expression dans laquelle $Z = \zeta(\tau, t)$ et l'intégrale étant prise en valeur principale au sens de Cauchy.

Les équations dont dépend le problème sont :

$$(8) \quad \left[\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right]_{Z=a} + \frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{a - \zeta(u, t)} - \frac{1}{a - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) = 0$$

$$\begin{aligned}
(9) \quad \frac{d\bar{H}}{dt} = & -(l-im) + i\omega \bar{H} + \frac{dG}{dH} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi \zeta(u, t)} \cdot \frac{d\zeta}{dH} + \\
& + \frac{i}{2\pi} \frac{d\zeta}{dH} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta(u, t)} - \frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, H est calculé pour $Z = \zeta(\tau, t) \frac{d\bar{H}}{dt}$ pour τ constant et l'égalité doit être vérifiée quel que soit τ

$$t_0 < \tau < t$$

enfin, on doit avoir $\zeta(\tau, t) = a$ puisque les tourbillons libres apparaissent à la pointe (qui correspond, dans le plan du cercle (C) à $Z = a$)

4° - Remarque sur le choix de Γ_0 .

Si le profil part du repos, on prendra $\Gamma_0 = 0$, mais si le mouvement est précédé d'un mouvement à circulation constante, on prendra pour Γ_0 la circulation correspondante.

5° - La détermination de $\Gamma(u)$ et $\zeta(u, t)$. -

Le système (8) - (9) ainsi obtenu et qui doit définir les fonctions $\Gamma(u)$ et $\zeta(u, t)$ est fort compliqué et sa résolution ne paraît pouvoir être abordée de façon approximative.

Toutes les fois que l'on peut connaître, de façon approchée, la fonction $\zeta(u, t)$ qui définit, à chaque instant, la configuration des tourbillons, on en déduira, par résolution de l'équation (8), (équation intégrale en $\Gamma(u)$) les répartitions de circulation autour du profil et dans le sillage.

Nous nous bornerons, dans la suite, à ce point de vue, qu'il serait évidemment souhaitable de compléter en utilisant des approximations successives que l'on peut imaginer suivant le schéma ci-après : en remplaçant dans (8) $\zeta(u, t)$ par une première approximation $\zeta_1(u, t)$ et résolvant cette équation, on détermine la première approximation $\Gamma_1(u)$. Considérant alors l'équation (9) et portant $\Gamma_1(u)$ et $\zeta_1(u, t)$ dans l'intégrale du second membre, on pourra obtenir une seconde approximation $\zeta_2(u, t)$ par intégration du système différentiel ainsi obtenu. On passera de là à Γ_2 et ainsi de suite. Mais la convergence de la méthode ainsi esquissée paraît délicate à préciser et les calculs seront compliqués; aussi n'insisterons-nous pas davantage sur ce sujet.

Si, dans l'équation (9), on néglige les termes provenant de troubles apportés dans le fluide par la présence du profil et par les tourbillons libres, ce qui est une hypothèse usuelle dans des questions analogues (théorie de l'hélice), il vient simplement :

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = - (l - im) + i \omega \bar{H}$$

équation qui exprime que les tourbillons libres restent à l'endroit où ils se forment, et qui s'intègre par quadratures comme il est bien connu.

Du point de vue géométrique, la question se présente très simplement : la connaissance de l , m , ω permet de déterminer, par rapport aux axes fixes, la trajectoire de la pointe du profil. A chaque instant t , la fonction $\zeta(u, t)$ représente l'image dans le plan de (C) , de l'arc de cette trajectoire qui correspond à :

$$t_0 < u < t$$

Dans la plupart des applications traitées, il y a de plus une approximation concernant le mouvement même du profil. On considère un mouvement moyen de translation rectiligne et des vibrations du profil autour de ce mouvement. C'est d'après le mouvement moyen que l'on définit le lieu des tourbillons libres et on utilise ensuite l'équation (8) dans laquelle G fait intervenir le mouvement réel du profil, pour déterminer les circulations. Toutes ces applications concernent donc des mouvements infiniment voisins (d'une manière qu'il convient de préciser) d'une translation.

Il faut remarquer, de plus, que les mouvements étudiés jusqu'ici concernent la plaque (ou un profil qui lui est assimilable) animée d'un mouvement moyen qui est une translation parallèle à cette plaque. En utilisant ce qui précède, on trouve donc que le mouvement des tourbillons libres déterminé comme il vient d'être dit, coïncide tout simplement avec le mouvement moyen.

Dans ce qui suit, nous envisagerons le cas beaucoup plus général des mouvements (M) voisins de l'un des mouvements (M_0) ; à circulation constante, caractérisés au chapitre II. Nous obtiendrons une deuxième approximation dans la résolu-

tion du système (8) - (9) relatif aux mouvements (M) en prenant pour trajectoires des tourbillons libres, celles des molécules fluides (qui passent par la pointe) dans le mouvement (M₀).

6° - Les mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante.-

Considérons deux mouvements (M₀) et (M₁) d'un même profil, le premier l₀, m₀, ω₀ étant à circulation constante Γ₀

$$(10) \quad m_0 + \omega_0 \Omega = \frac{\Gamma_0}{4 \pi a}$$

le second, l, m, ω étant à circulation variable et tel que

$$(11) \quad m + \omega \Omega = \frac{\Gamma_0}{4 \pi a} + \varepsilon(t)$$

[ε(t) restant petit par rapport à m et ω Ω]

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que tous les points du profil aient, dans les deux mouvements, des vitesses et des positions voisines.

Nous écrirons d'abord que la condition est nécessaire pour le point A (Ω, 0) de la droite (Δ). (Chapitre II § 2) ce qui donne :

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + \varepsilon_1 & \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_0}{dt} + \varepsilon_3 \\ \eta = \eta_0 + \varepsilon_2 & \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_0}{dt} + \varepsilon_4 \end{cases}$$

en désignant, pour le mouvement (M), par ξ et η les coordonnées du point A (Ω, 0) par rapport aux axes fixes et par ε₁ ε₂ ε₃ ε₄ des infiniment petits; les notations analogues affectées de l'indice zéro étant réservées pour le mouvement (M₀).

Cherchons si les conditions 10, 11, 12 sont satisfaisantes; en désignant par α, β les coordonnées de l'origine des axes liés au profil par rapport aux axes fixes, on pourra écrire :

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha - \alpha_0 + \Omega (\cos \theta - \cos \theta_0) = \varepsilon_1 \\ \beta - \beta_0 + \Omega (\sin \theta - \sin \theta_0) = \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} \cos \theta + \frac{d\eta}{dt} \sin \theta = l \\ \frac{d\xi_0}{dt} \cos \theta + \frac{d\eta_0}{dt} \sin \theta = l + \varepsilon_3 \cos \theta + \varepsilon_4 \sin \theta \\ \frac{d\xi_0}{dt} \cos \theta_0 + \frac{d\eta_0}{dt} \sin \theta_0 = l_0 \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} -\frac{d\xi}{dt} \sin \theta + \frac{d\eta}{dt} \cos \theta = m + \omega \cdot \Omega \\ -\frac{d\xi_0}{dt} \sin \theta + \frac{d\eta_0}{dt} \cos \theta = m + \omega \cdot \Omega - \varepsilon_3 \sin \theta + \varepsilon_4 \cos \theta \\ -\frac{d\xi_0}{dt} \sin \theta_0 + \frac{d\eta_0}{dt} \cos \theta_0 = m_0 + \omega_0 \cdot \Omega \end{cases}$$

En comparant le système (15) et les équations (10), (11) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{d\xi_0}{dt} \sin \theta_0 + \frac{d\eta_0}{dt} \cos \theta_0 &= \frac{\Gamma_0}{4\pi a} \\ -\frac{d\xi_0}{dt} \sin \theta + \frac{d\eta_0}{dt} \cos \theta &= \frac{\Gamma_0}{4\pi a} + \varepsilon(t) - \varepsilon_3 \sin \theta + \varepsilon_4 \cos \theta \end{aligned}$$

équations qui montrent que les angles θ et θ_0 restent voisins. Enfin le système (13) nous indique que les différences $\beta - \beta_0$ restent petites, ce qui prouve que dans les deux mouvements, les profils restent géométriquement voisins. (A condition, bien entendu, que le voisinage soit assuré initialement).

Les équations (14) montrent que la différence $l - l_0$ reste petite, mais il est impossible d'aller plus loin sans conditions supplémentaires.

On peut tirer de (15) le système :

$$\begin{aligned} -\frac{d\xi}{dt} \sin \theta + \frac{d\eta}{dt} \cos \theta &= \frac{\Gamma_0}{4\pi a} + \varepsilon(t) \\ -\frac{d\xi}{dt} \sin \theta_0 + \frac{d\eta}{dt} \cos \theta_0 &= \frac{\Gamma_0}{4\pi a} + \varepsilon_5 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varepsilon_5 = -\varepsilon_3 \sin \theta_0 + \varepsilon_4 \cos \theta_0$$

en dérivant par rapport au temps les deux équations on voit que les rotations instantanées ω et ω_0 resteront voisines si

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon_5}{dt}$$

restent petites.

(10) et (11) montrent immédiatement que m et m_0 restent voisins pendant tout le mouvement.

Les conditions nécessaires et suffisantes de voisinage géométrique et cinématique des deux mouvements sont donc : vitesses du point A voisines dans les deux mouvements et

$$\frac{d\varepsilon_5}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon}{dt}$$

voisines de zéro.

Remarquons que si les accélérations de A sont voisines, $\frac{d\varepsilon_5}{dt}$ restera petite et il en sera à fortiori de même si dans (M) et (M₀) le point A est animé du même mouvement; dans ces cas, la seule condition est que :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \text{ reste voisine de zéro.}$$

7° - Construction géométrique.-

On peut se rendre compte des résultats obtenus au n° précédent, en généralisant la construction du Chapitre II § 2.

Soit (H) l'hodographe d'un point P bien déterminé de (Δ) dans le cas d'un mouvement à circulation constante Γ_0 . On obtient la direction du premier axe en menant du point P de (H) l'une des tangentes au cercle γ_0 de centre O et de rayon Γ_0 .

$$\frac{4 \pi a}{\Gamma_0}$$

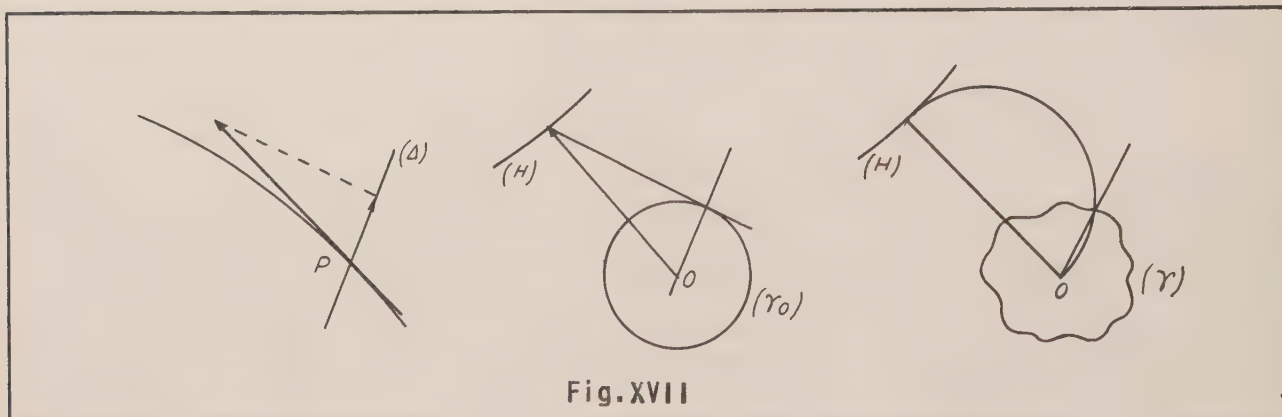


Fig. XVII

Ici ce cercle sera remplacé par une courbe (γ) (fig. XVII) dont les points seront voisins de ceux du cercle (γ_0) et l'on déterminera la direction du premier axe en utilisant l'intersection de (γ) avec le cercle de diamètre MO.

On voit que dans les deux mouvements, les profils garderont des orientations voisines

$$\theta = \theta_0 + \eta(t)$$

$\eta(t)$ restant petit durant tout le mouvement.

Si $\frac{d\varepsilon}{dt}$ reste petit, les tangentes à (γ) et au cercle (γ_0) resteront voisines et il en sera de même des variations de θ . La différence $\omega - \omega_0$ variera peu ainsi que $m - m_0$ et $\omega - \omega_0$; les deux mouvements seront géométriquement et cinématiquement voisins.

Dans le cas de variations assez grandes de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, la courbe (γ) présentera de nombreuses sinuosités et les variations de θ seront très rapides; les différences $\omega - \omega_0$, $m - m_0$, ne restent plus petites; les deux mouvements géométriquement voisins seront différents cinématiquement.

8° - Etude de l'échappement tourbillonnaire dans un mouvement à circulation variable.-

L'échappement tourbillonnaire est réglé, en général par les équations du système (8) - (9), or les noyaux tourbillonnaires gardent, après échappement une

intensité constante; on aura donc l'intensité des noyaux constituant la file en étudiant le système (8) - (9) au voisinage de la pointe ($Z=a$).

La vitesse d'un tourbillon (vitesse relative au profil) est donnée par l'équation (9); son affixe conjugué vaut :

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = - (l-im) + i \omega \bar{z} + \frac{dG}{dH(\zeta)} - \frac{i \Gamma_0}{2\pi \zeta} \frac{d\zeta}{dH} + \frac{i}{2\pi} \frac{d\zeta}{dH} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta(u, t)} - \frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta'} \right] d\Gamma(u)$$

à la pointe il vient

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = - (l-im) + i \omega \bar{z}_p + \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{1}{H' \zeta} \left[\frac{dG}{d\zeta} - \frac{i \Gamma_0}{\zeta} + \frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta(u, t)} - \frac{1}{\zeta(\tau, t) - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) \right]$$

Pour les profils usuels et sous réserve des hypothèses précédemment faites sur $\varepsilon(t)$ la limite précédente existe et nous la désignerons par $\bar{\alpha}$.

Au voisinage de la pointe nous pourrions donc écrire

$$z = z_p + \alpha (t-u) [1+\eta] \quad \eta \rightarrow 0 \text{ avec } t-u$$

En passant au plan du cercle, il viendra :

$$H(Z) = H(a) + \alpha (t-u) (1+\eta)$$

Utilisant enfin le développement de $H(Z)$ au voisinage de la pointe :

$$z = H(Z) = H(a) + A_\mu (Z-a)^\mu + A_{\mu-1} (Z-a)^{\mu+1} + \dots \quad 1 < \mu \leq 2$$

nous aurons

$$Z - a = \left[\frac{\alpha}{A_\mu} (t-u) \right]^{\frac{1}{\mu}} (1+\eta_1) \quad \eta_1 \rightarrow 0 \text{ avec } t-u$$

ou

$$\zeta(u, t) - a \sim \lambda (t-u)^{\frac{1}{\mu}}$$

Le noyau de l'équation intégrale (8) s'écrira :

$$\frac{\zeta \bar{\zeta} - a}{(a-\zeta)(\bar{\zeta}-a)}$$

soit

$$\frac{a(\lambda + \bar{\lambda}) + \lambda \bar{\lambda} (t-u)^{\frac{1}{\mu}} + \dots}{- \lambda \bar{\lambda} (t-u)^{\frac{1}{\mu}} + \dots}$$

Cette dernière expression montre que l'infini de l'équation intégrale ne fait pas de difficultés puisque

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\mu} < 1$$

Ce calcul n'est valable que pour $\lambda \neq 0$; si $\lambda = 0$, c'est que

$$l+im + i \omega z_p = \bar{K}$$

et ceci quelque soit ω .

Dans ce dernier cas, la vitesse absolue de la pointe est égale à la vitesse absolue de la molécule fluide qui y passe; il n'y a donc pas d'échappement tourbillonnaire.

9° - Etude de l'intensité tourbillonnaire.-

Le noyau de l'équation intégrale (8) devient infini comme

$$\left(\frac{1}{u-t}\right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\mu} < 1\right)$$

nous aurons donc à étudier une équation de la forme

$$\int_0^t \frac{F(u, t)}{(t-u)^{\frac{1}{\mu}}} \varphi(u) du = h(t)$$

avec

$$\varphi(u) = \frac{d\Gamma}{du}, \quad F(u, u) \neq 0, \quad F(u, t)$$

finie et continue.

Utilisant les notations de MM. VOLTERRA et J. PERES (*) nous écrirons :

$$\int_0^y \varphi(\xi) \frac{F(\xi, y)}{(y-\xi)^{\frac{1}{\mu}}} d\xi = h(y)$$

ou

$$\overset{x}{\varphi} \frac{F(\overset{x}{x}, y)}{(y-x)^{\frac{1}{\mu}}} = h(x, y) \text{ avec } x = 0$$

en multipliant à droite par $\overset{x}{1} \frac{1}{\mu}$ nous obtiendrons :

$$(17) \quad \overset{x}{\varphi} \overset{x}{f}_1 = h_1$$

avec

$$f_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} \int_0^1 \frac{F[x, x + (y-x)\theta]}{\theta^{\frac{1}{\mu}} (1-\theta)^{1-\frac{1}{\mu}}} d\theta$$

$$\xi = x + \theta(y-x)$$

$$h_1 = \overset{x}{h} \cdot \overset{x}{1} \frac{1}{\mu}$$

En utilisant une intégration par parties h_1 peut s'écrire

$$h_1(x, y) = h(x, y) \frac{(y-x)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\Gamma\left(2-\frac{1}{\mu}\right)} \int_x^y h'(\xi) \frac{(y-\xi)^{\frac{1}{\mu}}}{\Gamma\left(2-\frac{1}{\mu}\right)} d\xi$$

Ce qui permet de dériver en y les deux membres de l'équation (17); on obtient ainsi :

$$\varphi(x, y) \cdot F(x, x) + \int_x^y \varphi(x, \xi) \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial y} d\xi = \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

(*) Théorie générale des Fonctionnelles p. 169.

ou

$$\varphi(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} f_2 = \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial h_1(x, y)}{\partial y}$$

avec

$$f_2 = - \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Finalement l'équation (17) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (1 - f_2) = \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

dont la solution est :

$$\varphi = \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left[x^0 + f_2 + f_2^2 + \dots + f_2^n + \dots \right]$$

avec

$$(18) \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} = h(x, y) \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{(y-x)^{-\frac{1}{\mu}}}{\Gamma(2-\frac{1}{\mu})} + \int_x^y \frac{\partial h}{\partial \xi}(x, \xi) \frac{(1-\frac{1}{\mu})}{\Gamma(2-\frac{1}{\mu})} (y-\xi)^{-\frac{1}{\mu}} d\xi$$

Dans le cas d'un mouvement infiniment voisin de mouvements à circulations constantes, la fonction h est infiniment petite avec $\varepsilon(t)$ défini par

$$m + \omega \cdot \Omega = \frac{\Gamma_0}{4 \pi a} + \varepsilon(t)$$

Si de plus, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ reste infiniment petit, il en est de même de la fonction $\frac{\partial h_1}{\partial y}$ et la formule (18) montre que l'intensité tourbillonnaire reste toujours infiniment petite.

Nous réserverons donc le nom de mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante, à ceux pour lesquels

$$m + \omega \cdot \Omega - \frac{\Gamma_0}{4 \pi a} = \varepsilon(t) \quad \frac{d}{dt} (m + \omega \cdot \Omega) = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

restent simultanément petits.

10° - Mouvement des centres tourbillonnaires dans un mouvement infiniment voisin d'un mouvement à circulation constante.-

Soit (M_0) un mouvement à circulation constante caractérisé par l_0, m_0, ω_0 tels que

$$m_0 + \omega_0 \cdot \Omega = \frac{\Gamma_0}{4 \pi a}$$

le mouvement des molécules fluides est défini par

$$\frac{d\alpha}{dt} = - (l_0 - i m_0) + i \omega_0 \cdot \alpha + \frac{dG_0}{d\alpha} - \frac{i \Gamma_0}{2 \pi} \frac{d\zeta}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\zeta}$$

avec

$$\alpha = H(\zeta)$$

Soit, d'autre part, un mouvement (M_1) (l_1, m_1, ω_1), infiniment voisin du mouvement (M_0) , il nous sera possible de poser

$$m_1 - m_0 = \varepsilon_1$$

$$l_1 - l_0 = \varepsilon_2$$

$$\omega_1 - \omega_0 = \varepsilon_3$$

les ε étant de l'ordre de $\varepsilon(t)$ défini par

$$\left[\frac{dG_1}{dZ} - \frac{i \Gamma_0}{2 \pi Z} \right]_{Z=a} = i \varepsilon(t)$$

Le système (8) - (9) deviendra donc, dans le cas de mouvement (M_1)

$$\begin{cases} 2(m_1 + \omega_1 \Omega) - \frac{\Gamma_0}{2 \pi a} = \varepsilon(t) = -\frac{1}{2 \pi} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{a - \zeta(u, t)} - \frac{1}{a - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -(l_0 - im_0) + i \omega_0 \bar{\alpha} + \frac{dG_0}{d\alpha} - \frac{i \Gamma_0}{2 \pi \zeta} \frac{d\zeta}{d\alpha} - (\varepsilon_2 - i \varepsilon_1) + i \alpha \varepsilon_3 \\ + \frac{dg}{d\alpha} + \frac{i}{2 \pi} \frac{d\zeta}{d\alpha} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\zeta(t, u) - \zeta(t, \tau)} - \frac{1}{\zeta(t, u) - \zeta'(t, \tau)} \right] d\Gamma(u) \end{cases}$$

avec

$$G_1 = G_0 + g$$

Comme $G(Z)$ est linéaire en l, m, ω , g sera linéaire en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et en négligeant les infiniment petits de l'ordre de $\varepsilon(t)$, l'intégrale disparaîtra ($\frac{d\Gamma}{du}$ est de l'ordre de $\varepsilon(t)$) et le système deviendra :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) + \frac{1}{2 \pi} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{a - \zeta(u, t)} - \frac{1}{a - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) = 0 \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -(l_0 - im_0) + i \omega_0 \bar{\alpha} + \frac{dG_0}{d\alpha} - \frac{i \Gamma_0}{2 \pi \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\alpha} \end{cases}$$

La deuxième équation permettra de déterminer $\zeta(u, t)$ et montre que les tourbillons suivent approximativement les molécules fluides du mouvement (M_0), la deuxième donnera $\Gamma(u)$.

On pourra améliorer l'expression de $\zeta(u, t)$ en utilisant l'équation dans laquelle ζ et Γ auront les valeurs ci-dessus que nous désignerons par ζ_1 et Γ_1 , cette équation s'écrira :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -(l - im) + i \omega \bar{\alpha} + \frac{dG}{d\alpha} - \frac{i \Gamma_0}{2 \pi \zeta} \frac{d\zeta}{d\alpha} + \frac{i}{2 \pi} \frac{d\zeta_1}{d\alpha} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\zeta_1(u, t) - \zeta_1(\tau, t)} - \frac{1}{\zeta_1 - \zeta'_1} \right] d\Gamma_1(u)$$

et donnera une nouvelle valeur pour $\zeta(u, t)$ soit ζ_2 qui portée dans l'équation intégrale fournira une valeur plus approchée Γ_2 de Γ .

BIRBAUM semble être le premier à avoir étudié un mouvement du type précédent; il s'agissait d'une aile mince, assimilable à une plaque, animée d'un mouvement infiniment voisin d'une translation uniforme à circulation nulle.

WAGNER, KUSSNER ont abordé le même problème par des méthodes différentes.

11° - Calcul de la force et du mouvement dans le cas général.-

Nous savons que dans ce cas, le potentiel s'écrit :

$$F(Z, t) = G(Z, t) - \frac{i \Gamma_0}{2\pi} L \cdot Z + \frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t L \frac{Z - \zeta(u, t)}{Z - \zeta'(u, t)} d\Gamma(u)$$

et la force est donnée par la formule du chapitre II (page 9, § 6). Nous allons indiquer une méthode de calcul pour les intégrales qui figurent dans l'expression de la force

$$\int_c df = \int_c dF = \Gamma_0 + \int_{t_0}^t d\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma(t) - \Gamma(t_0)$$

où l'on pourra prendre $\Gamma(t_0) = 0$ puisque $\Gamma(t)$ n'est définie qu'à une constante près.

$$\int_c z df = \int_c H(Z) dF = \int_c H \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i \Gamma_0}{2\pi Z} \right) dZ + \frac{i}{2\pi} \int_c H dZ \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right) d\Gamma(u)$$

la dernière intégrale est la limite de

$$\frac{i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \Gamma_n \int H \left(\frac{1}{Z - \zeta_k} - \frac{1}{Z - \zeta'_k} \right) dZ$$

quand le nombre des tourbillons augmente indéfiniment; on peut changer les signes sommes et on obtient :

$$\int_c H \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i \Gamma_0}{2\pi Z} \right) dZ + \frac{i}{2\pi} \int_{t_0}^t d\Gamma(u) \int_c H \left(\frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right) dZ$$

où les intégrales prises le long de (C) peuvent se calculer par la méthode des résidus.

L'intégrale

$$\int_c \frac{\partial F}{\partial t} dH$$

s'écrit

$$\int_c \frac{\partial G}{\partial t} dH + \frac{i}{2\pi} \int_c dH \int_{t_0}^t \left(\frac{\frac{\partial \zeta'}{\partial t}}{Z - \zeta'} - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{Z - \zeta} \right) d\Gamma(u)$$

car la dérivée provenant de la limite supérieure est nulle en vertu de l'égalité

$$L \frac{Z - \zeta(t, t)}{Z - \zeta'(t, t)} = L1 = 0 \quad \zeta(t, t) = \zeta'(t, t) = a$$

La dernière intégrale figurant dans la force est

$$\int_c \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{H'_Z}$$

et peut s'écrire

$$\int_c \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right)^2 \frac{dZ}{H'_Z} + \frac{i}{\pi} \int_c \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \frac{dZ}{H'_Z} \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(u,t)} \right) d\Gamma(u) \\ - \frac{1}{4\pi^2} \int_c \frac{dZ}{H'_Z} \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(u,t)} \right) d\Gamma(u) \right]^2$$

En remarquant que, dans la deuxième intégrale, on peut échanger les signes sommes, on voit que pour le calcul des deux premiers termes, il est possible de se ramener à une intégrale en u .

On peut transformer la troisième intégrale de la manière suivante :

$$\left[\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) d\Gamma \right]^2 = \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(u,t)} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta(v,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(v,t)} \right) d\Gamma(u) d\Gamma(v)$$

$\mathcal{A}$ étant l'aire du rectangle du plan des u, v défini par

$$u=t_0 \quad u=t \quad v=t_0 \quad v=t$$

En remplaçant l'intégrale double par la limite d'une somme double, on verra que l'on peut échanger l'ordre des intégrations et écrire le dernier terme :

$$- \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathcal{A}} d\Gamma(u) d\Gamma(v) \int_c \frac{dZ}{H'_Z} \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(u,t)} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta(v,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'(v,t)} \right)$$

Ce qui précède montre donc que, dès que $H(Z)$ sera donnée, l'emploi de la méthode des résidus (par exemple) permettra de se ramener à des intégrales prises entre t_0 et t , même si les fonctions ζ et Γ sont inconnues.

Pour le moment des forces par rapport à O , le calcul se conduit de la même manière.

12° - Force et moment dans le cas d'un mouvement infiniment voisin d'un mouvement à circulation constante.-

En se reportant au paragraphe précédent, on voit que la formule qui donne la force contient des termes indépendants de la fonction Γ , d'autres qui sont de l'ordre de Γ'_u et enfin des termes de l'ordre de $(\Gamma'_u)^2$.

Les premiers forment l'expression trouvée au paragraphe 3 du Chap. II pour un mouvement à circulation constante. Nous négligeons les derniers puisque $(\Gamma'_u)^2$ est infiniment petit de second ordre par rapport à $\varepsilon(t)$.

Les termes en Γ'_u seront de l'ordre de $\varepsilon(t)$ et formeront l'expression

$$\begin{aligned}
& - \frac{i\rho\omega}{2\pi} \int_{t_0}^t d\Gamma(u) \int_c H \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) dZ - \frac{\rho}{2\pi} \int_{t_0}^t d\Gamma \int_c \left(\frac{\frac{\partial \zeta'}{\partial t}}{Z-\zeta'} - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{Z-\zeta} \right) dH \\
& - \frac{\rho}{2\pi} \int_{t_0}^t d\Gamma \int_c \overline{\left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta(u,t)} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) \frac{dZ}{H'_Z}} + i\rho(l+im) \int_{t_0}^t d\Gamma(u)
\end{aligned}$$

On peut calculer la première intégrale en utilisant les résidus de la fonction sous le signe somme relatif aux points singuliers extérieurs au cercle (C)

$$\int_c H \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) dZ = -2\pi i (R_\alpha + R_\zeta)$$

soit

$$\int_c H \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) dZ = 2\pi i [\zeta - \zeta' - H(\zeta)]$$

En opérant de la même manière pour la deuxième, on trouve

$$\int_c \left(\frac{\frac{\partial \zeta'}{\partial t}}{Z-\zeta'} - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{Z-\zeta} \right) dH = 2\pi i \left[\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H(\zeta)}{\partial t} \right]$$

Pour la troisième intégrale il faut remarquer que H'_Z présente un zéro sur le cercle C, nous aurons donc

$$\begin{aligned}
& \int_c \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) \frac{dZ}{H'_Z} + \int_\gamma \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) \frac{dZ}{H'_Z} \\
& = -2\pi i (R_\alpha + R_\zeta)
\end{aligned}$$

γ étant un demi-cercle de rayon très petit destiné à éviter le point singulier $Z = a$, de la fonction, situé sur C (voir fig. XVIII).

L'intégrale le long de (γ) présente en facteur

$$\left[\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right]_{Z=a}$$

expression de l'ordre de $\varepsilon(t)$ (Voir § 8 du présent chapitre). Le terme correspondant sera donc négligeable et il reste :

$$\int_c \left(\frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right) \left(\frac{1}{Z-\zeta} - \frac{1}{Z-\zeta'} \right) \frac{dZ}{H'_Z} = 2\pi i \left(\frac{dG}{d\zeta} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi\zeta} \right) \frac{1}{H'_\zeta}$$

La partie de la force provenant de l'échappement tourbillonnaire sera :

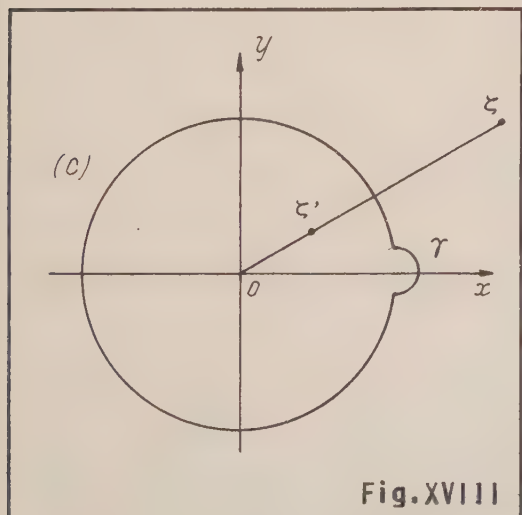


Fig. XVIII

$$i\rho(l+im)\int_{t_0}^t d\Gamma + \rho\omega\int_{t_0}^t \left[\zeta - \zeta' - H(\zeta) \right] d\Gamma + i\rho\int_{t_0}^t \left[\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H(\zeta)}{\partial t} \right] d\Gamma -$$

$$- \rho i \int_{t_0}^t \frac{1}{H'(\zeta)} \left(\frac{dG}{d\zeta} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi\zeta} \right) d\Gamma$$

Pour avoir la force totale, on ajoutera à l'expression précédente, la formule du chapitre II, § 3, qui donne la force pour un mouvement à circulation constante.

Les intégrales figurant dans le moment se calculent de la même manière, ce sont :

$$\rho(l-im)\int_c HdF - \frac{\rho}{2}\int_c \frac{\partial F}{\partial t} d(H.H_1) - \frac{\rho}{2}\int_c \frac{H}{\frac{dH}{dZ}} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ$$

La première a déjà été calculée dans l'évaluation de la force, et la partie qui dépend de Γ est :

$$- \rho(l-im)\int_{t_0}^t \left[\zeta - \zeta' - H(\zeta) \right] d\Gamma$$

La deuxième peut se calculer en utilisant le développement de $\frac{dHH_1}{dt}$, donné au paragraphe 3 du chapitre II, elle vaut :

$$- \frac{\rho}{2}\int_{t_0}^t \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} d\Gamma + \frac{\rho}{2}\int_{t_0}^t \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \zeta'^{n-1} d\Gamma$$

On peut simplifier cette expression en se reportant deux formules du chapitre I, § 3

$$\zeta \bar{\zeta}' = a^2 \quad \bar{A}_n (a^2)^n = A_{-n}$$

Ces formules permettent d'écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \zeta'^{1-n-1} \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Le terme correspondant pourra donc s'écrire :

$$- \rho \mathcal{R} \int_{t_0}^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma$$

La troisième se calculera comme l'intégrale analogue que nous avons rencontrée dans la force, la partie provenant de l'intégration le long du demi-cercle (γ) est toujours négligeable; on trouve :

$$- \rho \int_{t_0}^t \frac{H(\zeta)}{\frac{dH}{d\zeta}} \left(\frac{dG}{d\zeta} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi\zeta} \right) d\Gamma(u)$$

Pour obtenir le moment des forces par rapport à l'origine, il faudra ajouter à la formule trouvée pour un mouvement à circulation constante (Ch. II - § 3), l'expression :

$$\mathcal{R} \left\{ - \rho (l-im) \int_{t_0}^t \left[\zeta - \zeta' - H(\zeta) \right] d\Gamma - \rho \int_{t_0}^t \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma \right. \\ \left. - \rho \int_{t_0}^t \frac{H(\zeta)}{\frac{dH}{d\zeta}} \left(\frac{dG}{d\zeta} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi\zeta} \right) d\Gamma \right\}$$

Chapitre IV

ETUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS INFINIMENT VOISINS DE LA TRANSLATION A CIRCULATION NULLE

1° - Aile épaisse en mouvement infiniment voisin d'un mouvement de translation uniforme à circulation nulle.-

Dans un tel mouvement, les tourbillons suivront les molécules fluides, qui passent par la pointe, avec une loi qui est celle du mouvement de translation à circulation nulle. Ce dernier mouvement a été étudié au § 5 du chapitre I : les images des tourbillons dans le plan du cercle (C) seront sur la droite joignant le centre de ce cercle à l'image de la pointe et comme nous l'avons déjà vu, l'équation horaire sera :

$$V d \left(\frac{a^2}{\rho} + \rho \right) = \frac{dH \cdot \bar{dH}}{dt}$$

et admettra une solution de la forme :

$$\rho = a + af \left[V (t-u) \right]$$

avec

$$f(0) = 0$$

Dans le plan du profil, les tourbillons sont situés sur une courbe qui passe par la pointe et qui est rapidement asymptote au premier axe.

1.1.- Détermination de la circulation.-

L'équation intégrale donnant la circulation s'écrit

$$4\pi a (m + \omega \zeta_c) = \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\rho + a}{\rho - a} d\Gamma(u)$$

elle deviendra :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{2 + f \left[V (t-u) \right]}{f \left[V (t-u) \right]} \varphi(u) du$$

avec

$$\frac{d\Gamma}{du} = \varphi(u)$$

En faisant le changement de variable

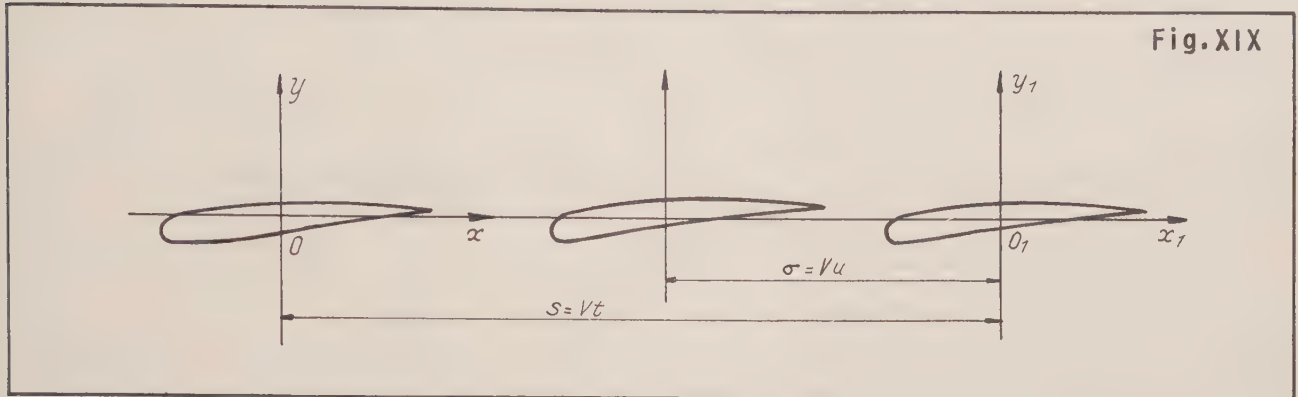
$$Vt = s$$

$$Vu = \sigma$$

on obtient

$$\varepsilon(s) = \int_0^{\frac{s}{V}} \frac{2 + f(s-\sigma)}{f(s-\sigma)} \varphi\left(\frac{\sigma}{V}\right) d\sigma$$

Dans cette équation, s représente l'espace parcouru par le profil depuis le début du mouvement et σ l'espace parcouru par le profil au moment de la sortie à la pointe du tourbillon d'intensité $\varphi(\sigma)$



La fonction f dépend du profil étudié, de sorte qu'il en sera de même de la fonction circulation; nous allons donner une méthode de calcul pour la résolution de l'équation intégrale précédente.

Nous remarquerons d'abord que $f(s-\sigma)$ est un infiniment petit avec $s-\sigma$ d'ordre $\frac{1}{\mu}$

$$1 < \mu \leq 2$$

Ch. III. - § 8

On peut donc poser

$$\frac{2 + f(s-\sigma)}{f(s-\sigma)} = \frac{g(s-\sigma)}{(s-\sigma)^{\frac{1}{\mu}}}$$

$g(s-\sigma)$ étant régulière au voisinage de $s-\sigma = 0$.

L'équation intégrale s'écrit donc

$$4 \pi a (m + \omega \Omega) = \int_0^{\frac{s}{V}} g(s-\sigma) (s-\sigma)^{-\frac{1}{\mu}} \varphi\left(\frac{\sigma}{V}\right) \frac{d\sigma}{V}$$

avec

$$\varphi(\sigma) d\sigma = d\Gamma(\sigma)$$

Adoptant les notations de MM. VOLTERRA et PERES (Théorie générale des fonctionnelles, p.166), nous écrivons :

$$h(y) = \int_x^y g(y-\zeta) (y-\zeta)^{-\frac{1}{\mu}} \varphi(\zeta) d\zeta$$

avec

$$t = y \quad u = \zeta \quad h(t) = 4 \pi a (m + \omega \Omega)$$

la solution cherchée s'obtenant à partir de l'équation précédente en faisant $x=0$, l'équation s'écrit aussi :

$$(19) \quad \frac{h(y)}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)} = \varphi(y) \cdot g(y-x) \times \frac{(y-x)^{-\frac{1}{\mu}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)$ désignant la valeur de l'intégrale eulérienne de seconde espèce pour la valeur $\frac{1}{\mu}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{\mu}-1} e^{-\frac{x}{\mu}} dx$$

Pour résoudre l'équation (19), nous multiplions, à droite, les deux membres par

$$\frac{h(y)}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)} \cdot \frac{(y-x)^{-\frac{\mu-1}{\mu}}}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)} = \varphi(y) \cdot g(y-x) \frac{(y-x)^{-\frac{1}{\mu}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)} \cdot \frac{(y-x)^{-\frac{\mu-1}{\mu}}}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)}$$

et nous obtenons

$$(20) \quad h_1(x, y) = \varphi(y) \cdot g_1(xy)$$

avec un noyau $g_1(xy)$ du premier ordre

$$g_1(xy) = \int_x^y g(\xi-x) \frac{(\xi-x)^{-\frac{1}{\mu}} (y-\xi)^{-\frac{\mu-1}{\mu}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)} d\xi$$

que le changement de variable

$$\xi = x + r(y-x)$$

permet d'écrire

$$g_1(xy) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)} \int_0^1 \frac{g[r(y-x)]}{r^{\frac{1}{\mu}} (1-r)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} dr$$

en dérivant en y l'équation (20), on obtient

$$(21) \quad \varphi(y) \cdot g_1(y, y) + \int_x^y \varphi(\xi) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(\xi, y) d\xi = \frac{\partial h}{\partial y}$$

avec

$$g_1(y, y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)} \int_0^1 \frac{g(y, y)}{r^{\frac{1}{\mu}} (1-r)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} dr$$

soit

$$g_1(y, y) = \frac{2 \pi a}{\sin \frac{\pi}{\mu}} \lim_{t \rightarrow u=0} \frac{(t-u)^{\frac{1}{\mu}}}{f(t-u)}$$

constante que nous désignons par b .

Calculons la dérivée, par rapport à y , de la fonction

$$h_1(xy) = \int_x^y \frac{h(\xi)}{\Gamma(\frac{1}{\mu})} \frac{(y-\xi)^{\frac{\mu-1}{\mu}}}{\Gamma(\frac{\mu-1}{\mu})} d\xi$$

pour cela, nous intégrerons d'abord h , par parties

$$h_1(xy) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\mu}) \Gamma(\frac{\mu-1}{\mu})} \left[-\mu h(\xi) (y-\xi)^{\frac{1}{\mu}} \right]_x^y + \int_x^y \mu (y-\xi)^{\frac{1}{\mu}} \frac{dh}{d\xi} d\xi$$

$$h_1(xy) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\mu}) \Gamma(\frac{\mu-1}{\mu})} \left[\mu h(x) (y-x)^{\frac{1}{\mu}} + \int_x^y \mu (y-\xi)^{\frac{1}{\mu}} \frac{dh}{d\xi} d\xi \right]$$

et nous obtenons par dérivation

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\mu}) \Gamma(\frac{\mu-1}{\mu})} \left[h(x) (y-x)^{\frac{1}{\mu}-1} + \int_x^y (y-\xi)^{\frac{1}{\mu}-1} \frac{dh}{d\xi} d\xi \right]$$

dont nous pourrions toujours transformer l'intégrale par le changement de variable

$$\xi = x + r(y-x)$$

Enfin le calcul de $\frac{\partial g_1}{\partial y}$ donnera

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\mu}) \Gamma(\frac{\mu-1}{\mu})} \int_0^1 \frac{\frac{\partial g}{\partial y} [r(y-x)]}{r^{\frac{1}{\mu}} (1-r)^{\frac{\mu-1}{\mu}}} dr$$

et l'équation (21) s'écrira

$$\varphi(y) - \varphi^x \cdot g_2^x = h_2$$

avec

$$g_2 = -\frac{1}{b} \frac{\partial g_1}{\partial y} [r, r(y-x)], \quad h_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

La solution cherchée sera donc :

$$\varphi = h_2^x \left[g_2^x + g_2^1 + \dots + g_2^n + \dots \right]$$

1.2.- calcul pratique de φ .

La somme

$$g_2^0 + g_2^1 + \dots + g_2^n + \dots$$

ne dépend pas de la nature du mouvement; elle reste la même pour tous les mouvements du profil infiniment voisins de la translation à circulation nulle; on pourra la calculer de la manière suivante :

$$g_2 = F_1(\rho) \quad \text{avec } y - x = \rho$$

$$g_2^x = \int_x^y F_1(\xi - x) F_1(y - \xi) d\xi$$

qui donne, en posant

$$\xi = x + \lambda(y - x)$$

$$g_2^x = \rho \int_0^1 F_1(\lambda\rho) F_1[(1-\lambda)\rho] d\lambda = F_2(\rho)$$

Si

$$g_2^n = F_n(\rho)$$

$$g_2^{n+1} = \int_x^y F_n(\xi - x) F_1(y - \xi) d\xi$$

soit

$$g_2^{n+1} = \rho \int_0^1 F_n(\lambda\rho) F_1[(1-\lambda)\rho] d\lambda = F_{n+1}(\rho)$$

La loi de formation des fonctions F_i est toujours la même, et on pourra construire une table de la fonction :

$$g_2^0 + g_2^1 + \dots + g_2^n + \dots = F_1(\rho) + \dots + F_n(\rho) = F(y-x)$$

Le calcul de l'intégrale

$$\varphi(y) = \int_0^y h_2(\xi) F(y - \xi) d\xi$$

ne présentera alors aucune difficulté.

1.3.- Détermination des efforts aérodynamiques.-

Dans un mouvement infiniment voisin de la translation uniforme à circulation nulle, le premier axe du profil fait avec la direction fixe o_1x_1 un angle qui reste petit tandis que tous les points du profil sont animés de vitesses voisines de la translation de composantes $-V$, o par rapport aux axes fixes.

Nous nous donnons le mouvement du point A du profil dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont Ω et o . (Voir fig. XX).

Par rapport aux axes fixes, nous pourrions prendre $-Vt$ pour abscisse de A, tandis que son ordonnée sera une certaine fonction du temps que nous désignerons par h .

Nous prendrons $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$ et en conservant les notations habituelles, nous aurons :

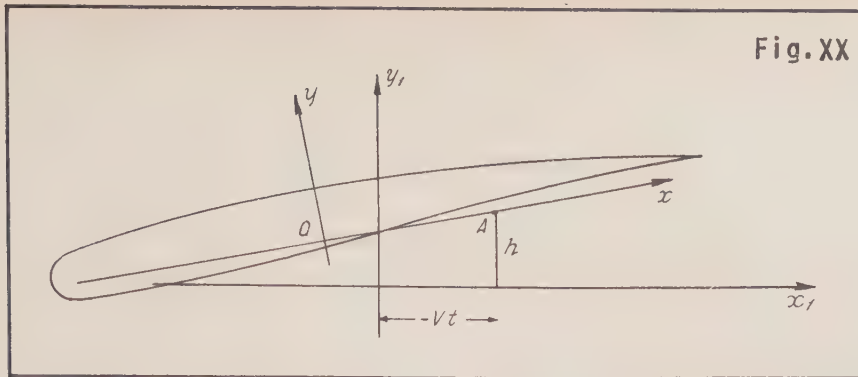


Fig. XX

$$l = \theta \frac{dh}{dt} - V$$

$$m = \frac{dh}{dt} + V \theta - \Omega \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \theta \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{dh}{dt} \frac{d\theta}{dt} + V \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} + V \frac{d\theta}{dt} - \Omega \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La partie de la force indépendante de l'échappement tourbillonnaire sera donnée par son affixe (en axes liés au profil que l'on peut écrire sous la forme (ch. II § 3)

$$F = X + i Y = \omega (A l + B m + C \omega) - i \left(A \frac{dl}{dt} + B \frac{dm}{dt} + C \frac{d\omega}{dt} \right) \quad (*)$$

avec

$$A = 2 \pi \rho i (a_1 - a^2) + \rho i A$$

$$B = 2 \pi \rho (a_1 + a^2) - \rho A$$

$$C = 2 \pi \rho A_{-1} - \rho A \zeta$$

Par hypothèse

$$\frac{\theta}{\pi}, \frac{m}{V}, \frac{\omega \Omega}{V}$$

sont petits et nous désignons par ε un infiniment petit du même ordre.

La formule

$$m = \frac{dh}{dt} + V \theta - \omega \Omega$$

montre que $\frac{1}{V} \frac{dh}{dt}$ est de l'ordre de ε et nous pourrions en déduire les ordres des différents termes :

(*) On peut remarquer que l'affixe de la force calculée en axes fixes peut s'écrire :

$$- i \frac{d}{dt} (e^{i\theta} u)$$

avec

$$u = A l + B m + C \omega$$

ωl	sera de l'ordre de	$V^2 \varepsilon$
ωm	"	$V^2 \varepsilon^2$
ω^2	"	$V^2 \varepsilon^2$
$\frac{dl}{dt}$	"	$\varepsilon \frac{d^2 h}{dt^2} + V^2 \varepsilon^2$
$\frac{dm}{dt}$	"	$\frac{d^2 h}{dt^2} + V^2 \varepsilon - \Omega \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

Ce qui précède montre que dans le premier crochet qui figure dans l'expression de la force, il suffira de conserver

$$- A V$$

et dans la deuxième

$$B \frac{dm}{dt} + C \frac{d\omega}{dt}$$

Il restera :

$$F = - V \omega (A + i B) + i (B \Omega - C) \frac{d\omega}{dt} - i B \frac{d^2 h}{dt^2}$$

c'est-à-dire :

$$F = - 4 \pi \rho i a_1 \omega V + i (B \Omega - C) \frac{d\omega}{dt} - i B \frac{d^2 h}{dt^2}$$

La formule qui donne, dans les mêmes conditions, le moment, peut s'écrire (ch. II § 3)

$$\pi \rho \mathcal{I} \left\{ 2 a_1 (l - im)^2 - 2 i \omega (l - im) A_{-1} + \left(\frac{dl}{dt} - i \frac{dm}{dt} \right) (A_{-1} - \frac{\mathcal{A}}{\pi} \zeta) - a^2 A_1 \left(\frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} \right) - i P \frac{d\omega}{dt} \right\} + \rho \mathcal{A} \omega (i \xi + m \eta)$$

car

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n A_{-n} = P, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n A_n = A_{-1} - \frac{\mathcal{A}}{\pi} \zeta \quad (\text{ch. II, § 4})$$

En remarquant que le coefficient de l^2 égal à $2 \pi \rho \mathcal{I}(a_1)$ peut être petit, nous devons conserver dans l'expression du moment les termes en

$$l^2, \omega l, lm,$$

ce qui donne

$$\pi \rho \mathcal{I} \left\{ 2 a_1 l^2 - 4 i a_1 l m - 2 i A_{-1} l \omega + l' (A_{-1} - a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}}{\pi} \zeta) - i m' (A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}}{\pi} \zeta) - i \omega' P \right\} + \rho \mathcal{A} \xi l \omega$$

Remarquant enfin que

$$A_{-1} = a^2 \bar{A}_1 \quad l \sim V \quad (\text{ch. I, § 3})$$

$$\frac{dl}{dt} \text{ négligeable devant } \frac{dm}{dt}$$

on obtient

$$2 \pi \rho \mathcal{I}(a_1) V^2 + 4 \pi \rho \mathcal{R}(a_1) V \left(\frac{dh}{dt} + V \theta - \Omega \frac{d\theta}{dt} \right) + 2 \pi \rho \mathcal{R}(A_{-1}) V \frac{d\theta}{dt} \\ - \pi \rho \mathcal{R}(A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi}) \left(\frac{d^2 h}{dt^2} + V \frac{d\theta}{dt} - \Omega \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - \pi \rho P \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \rho \mathcal{A} \xi V \frac{d\theta}{dt}$$

soit

$$2 \pi \rho \mathcal{I}(a_1) V^2 + 4 \pi \rho \mathcal{R}(a_1) V^2 \theta + \pi \rho V \frac{d\theta}{dt} \mathcal{R}(-4 a_1 \Omega) + 4 \pi \rho \mathcal{R}(a_1) V \frac{dh}{dt} \\ - \pi \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} \left[P - \Omega \mathcal{R}(A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi}) \right] - \pi \rho \frac{d^2 h}{dt^2} \mathcal{R}(A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi})$$

En remarquant que, pour les profils usuels, les parties imaginaires de a_1 , A_{-1} , ξ , sont négligeables, nous écrirons les formules qui donnent la partie des efforts aérodynamiques, indépendante de l'échappement tourbillonnaire, sous la forme :

$$F = \pi \rho i \left(\alpha V \frac{d\theta}{dt} + \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 h}{dt^2} \right)$$

$$M_o = \pi \rho \left[\alpha_1 V \frac{d\theta}{dt} + \beta_1 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2 h}{dt^2} + 4 V \mathcal{R}(a_1) \left(V \theta + \frac{dh}{dt} \right) \right]$$

avec

$$\alpha = -4 a_1$$

$$\beta = 2 \Omega \left(\mathcal{R}(a_1) + a^2 - \frac{\mathcal{A}}{2\pi} \right) - 2 \mathcal{R} A_{-1} + \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi}$$

$$\gamma = \frac{\mathcal{A}}{\pi} - 2 (\mathcal{R} a_1 + a^2)$$

$$\alpha_1 = -4 \Omega \mathcal{R}(a_1)$$

$$\beta_1 = \Omega \mathcal{R}(A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi} - P)$$

$$\gamma_1 = -\mathcal{R}(A_{-1} + a^2 A_1 - \frac{\mathcal{A}\xi}{\pi})$$

La partie de la force provenant de l'échappement tourbillonnaire sera (ch. III § 12).

$$i \rho (l + im) \int_0^t d\Gamma + \rho \omega \int_0^t \left[\xi - \xi' - H(\xi) \right] d\Gamma + i \rho \int_0^t \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\Gamma \\ - i \rho \int_0^t \frac{1}{H' \xi} \frac{dG}{d\xi} d\Gamma$$

ou, en conservant seulement les termes du même ordre que $V\epsilon$

$$i \rho l \int_0^t d\Gamma + i \rho \int_0^t \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) d\Gamma$$

Le quatrième terme, linéaire en m et ω est en effet négligeable, sauf,

peut-être au voisinage de $\zeta=a$ qui annule $\frac{dH}{d\zeta}$. Mais comme

$$\frac{1}{\frac{dH}{d\zeta}} \cdot \frac{dG}{d\zeta} = \frac{dG}{dH}$$

représente, pour $\zeta=a$, la vitesse du tourbillon à sa naissance (vitesse qui reste finie) l'intégrale en question est négligeable.

On opérera de la même manière pour le moment par rapport à O des forces aérodynamiques. La partie provenant de l'échappement tourbillonnaire s'écrira :

$$\mathcal{R} \left\{ -\rho l \int_0^t [\zeta - \zeta'_{-H}(\zeta)] d\Gamma - \rho \int_0^t \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma - \int_0^t \frac{H(\zeta)}{\frac{dH}{d\zeta}} \cdot \frac{dG}{d\zeta} d\Gamma \right\}$$

et en supprimant les termes négligeables, il restera :

$$\mathcal{R} \left\{ -\rho l \int_0^t [\zeta - \zeta'_{-H}(\zeta)] d\Gamma - \rho \int_0^t \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma \right\}$$

On peut remarquer, qu'en utilisant les notations du ch.I, § 3, les parties de la force et du mouvement qui nous occupent s'écrivent :

$$i \rho l \int_0^t d\Gamma - \rho \int_0^t \frac{\partial g^{(2)}(\zeta)}{\partial t} d\Gamma$$

$$\mathcal{I} \rho \int_0^t \left[\frac{\partial g^{(3)}(\zeta)}{\partial t} - l g^{(2)} \right] d\Gamma$$

1.4.- Vitesse critique d'une aile épaisse.-

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que la méthode employée par Ellenberger (ou Theodorsen) pour le calcul de la vitesse critique d'une aile mince est encore applicable à une aile épaisse.

On sait que cette méthode conduit à prendre h et θ sous les formes suivantes

$$h = h_0 e^{i\lambda t} \quad \theta = \theta_0 e^{i\lambda t} \quad (\lambda \text{ réel})$$

et à chercher la circulation sous la même forme :

$$\varphi = A e^{i\lambda t}$$

L'équation intégrale qui donne φ s'écrit :

$$(22) \quad 4 \pi a \left(\frac{dh}{dt} + V \cdot \theta \right) = \int_{t_0}^t \frac{2 + f[V(t-u)]}{f[V(t-u)]} \varphi(u) du$$

en admettant que les vibrations n'apparaissent pas au début du mouvement mais seulement au temps t_0 .

Si l'on pose :

$$u = \frac{\sigma}{V}, \quad t = \frac{s}{V}$$

on obtient

$$4 \pi a (i \lambda h_0 e^{i \lambda t} + v \theta_0 e^{i \lambda t}) = \int_{s_0}^s \frac{2 + f(s-\sigma)}{f(s-\sigma)} \varphi\left(\frac{\sigma}{V}\right) \frac{d\sigma}{V}$$

Le changement de variable

$$s - \sigma = w$$

permet d'écrire

$$4 \pi a e^{i \lambda t} (i \lambda h_0 + v \theta_0) = A \int_0^{s-s_0} \frac{2 + f(w)}{f(w)} e^{i \lambda \frac{s-w}{V}} \frac{dw}{V}$$

soit

$$4 \pi a e^{i \lambda t} (i \lambda h_0 + v \theta_0) = \frac{A}{V} e^{i \lambda t} \int_0^{s-s_0} \frac{2 + f(w)}{f(w)} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw$$

Dans ce qui précède, la solution, physiquement acceptable est la partie réelle de φ qui correspond aux parties réelles de $h(t)$ et $\theta(t)$ et qui doit être d'ailleurs solution de l'équation obtenue en prenant les parties réelles des deux membres de l'équation précédente.

De plus, nous admettons que, bien avant que la vitesse critique ne soit atteinte, le sillage peut être considéré comme infini et par conséquent, la limite $s-s_0$ remplacée par l'infini. Cette hypothèse introduit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{2 + f(w)}{f(w)} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw$$

dans laquelle la limite zéro ne fait pas de difficultés puisque $f(w)$ est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{\mu}$ par rapport à w ($1 < \mu \leq 2$) - (voir chap. III § 8).

Quand w , au contraire, augmente indéfiniment, il en est de même de $f(w)$ et la fraction

$$\frac{2 + f(w)}{f(w)}$$

tend vers 1 : l'intégrale peut ne plus avoir de sens. Nous leverons la difficulté en introduisant l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[\frac{2 + f(w)}{f(w)} - 1 \right] e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw$$

L'équation (22) s'écrira donc :

$$4 \pi a e^{i \lambda t} (i \lambda h_0 + v \theta_0) = \frac{A}{V} e^{i \lambda t} \int_0^{s-s_0} \frac{2}{f(w)} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw + \frac{A}{V} e^{i \lambda t} \int_0^{s-s_0} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw$$

soit

$$4 \pi a e^{i \lambda t} (i \lambda h_0 + v \theta_0) = \frac{A}{V} e^{i \lambda t} \int_0^\infty \frac{2}{f(w)} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw - \frac{iA}{\lambda} e^{i \lambda t} + \frac{iA}{\lambda} e^{i \lambda \frac{s_0}{V}}$$

Cette relation est une identité en t et on obtiendra la solution physiquement acceptable de l'équation intégrale (22) en écrivant

$$4 \pi a (i \lambda h_0 + v \theta_0) = \frac{A}{V} \int_0^\alpha \frac{2}{f(w)} e^{-i \lambda \frac{w}{V}} dw - \frac{A_1}{\lambda}$$

$$\Re(A i e^{i \lambda \frac{s_0}{V}}) = 0$$

La première de ces relations déterminera la constante complexe A , la deuxième donnera s_0 .

La circulation sera donnée par la partie réelle de

$$\varphi = A e^{i \lambda t}$$

et satisfera bien à l'équation intégrale (22). La formule qui donne la force fait intervenir l'intégrale :

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v \right) d\Gamma$$

ou

$$\frac{1}{V} \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v \right) \varphi \left(\frac{\sigma}{V} \right) d\sigma$$

et comme au voisinage de $s - \sigma = 0$

est de l'ordre de $(s-\sigma)^{\frac{1}{\mu}}$: $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ sera d'ordre $\frac{1}{\mu} - 1$ par rapport à $s-\sigma$.

En utilisant l'expression de $H(\xi)$ donnée au chapitre III § 8, on constate que $\frac{\partial H}{\partial t}$ est d'ordre zéro par rapport à $s-\sigma$ ce qui montre que l'expression

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v$$

est un infiniment grand avec $\frac{1}{s-\sigma}$ de l'ordre de

$$\frac{1}{(s-\sigma)^{1-\frac{1}{\mu}}} = \frac{1}{w^{1-\frac{1}{\mu}}}$$

et que la limite inférieure ne fait pas de difficultés.

Pour w très grand, on utilisera l'équation du § 1 du présent chapitre et le développement de $H(\xi)$ donné au chapitre I, on constatera que l'expression

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v$$

tend vers $-v$; la limite supérieure peut donc présenter une difficulté que nous lèverons en écrivant :

$$\int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v \right) d\Gamma = \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} - v + v \frac{\xi+a}{\xi-a} \right) d\Gamma - \int_{s_0}^s v \frac{\xi+a}{\xi-a} d\Gamma$$

soit en utilisant l'équation intégrale (22) :

$$\int_{\sigma_0}^s \left[\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2 a v}{f(s-\sigma)} \right] d\Gamma - 4 \pi a v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right),$$

L'expression

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2 v}{f(s-\sigma)}$$

est une fonction de $s-\sigma$ dont la partie imaginaire (qui est d'ailleurs celle de $\frac{H}{t}$) est toujours négligeable pour le motif l'étude de la trajectoire tourbillonnaire dans le plan du profil (voir § 1 du présent chapitre).

Nous posons donc

$$v f_1(s-\sigma) = \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{2 v}{f(s-\sigma)} + \mathcal{R} \frac{\partial H}{\partial t}$$

et l'intégrale qui nous occupe deviendra :

$$v \int_{\sigma_0}^s f_1(s-\sigma) \varphi\left(\frac{\sigma}{v}\right) d\frac{\sigma}{v} - 4 \pi a v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right)$$

soit en posant

$$s - \sigma = w$$

$$\int_0^{s-\sigma_0} f_1(w) \varphi\left(\frac{s-w}{v}\right) dw - 4 \pi a v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right)$$

C'est-à-dire, en admettant toujours que le sillage est infini

$$A e^{i\lambda t} \int_0^\infty f_1(w) e^{-i\frac{w\lambda}{v}} dw - 4 \pi a v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right),$$

L'expression totale de la force est donc :

$$\pi \rho i \left[-4 a v \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) + a v \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + v \frac{d^2h}{dt^2} \right] + i \rho A e^{i\lambda t} \int_0^\infty f_1(w) e^{-i\frac{w\lambda}{v}} dw$$

Enfin, en remplaçant λ par sa valeur, on obtiendra une expression linéaire par rapport à θ , h et leurs dérivées en t :

$$A = \frac{4 \pi a v (i \lambda h_0 + v \theta_0)}{}$$

$$\int_0^\infty \frac{2}{f(w)} e^{-i\frac{w\lambda}{v}} dw = i \frac{v}{\lambda}$$

$$= \pi \rho i \left[-4 a v \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) + a v \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + v \frac{d^2h}{dt^2} \right] + 4 \pi a \rho i v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right) \frac{\int_0^\infty f_1(w) e^{-i\frac{w\lambda}{v}} dw}{-\frac{i v}{\lambda} + \int_0^\infty \frac{2}{f(w)} e^{-i\frac{w\lambda}{v}} dw}$$

Nous allons, pour terminer, faire un calcul analogue pour le moment des forces par rapport à o. L'intégrale :

$$\mathcal{R} \left\{ -\rho l \int_{t_0}^t [\zeta - \zeta' - H(\zeta)] d\Gamma - \rho \int_{t_0}^t \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\Gamma \right\}$$

peut s'écrire

$$\rho \mathcal{R} \left\{ \int_{t_0}^t \left[V [\zeta - \zeta' - H(\zeta)] - \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] d\Gamma \right\}$$

soit en posant

$$\mathcal{R} \left\{ V [\zeta - \zeta' - H(\zeta)] - \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{n A_{-n}}{\zeta^{n+1}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} = a V f_2(s - \sigma)$$

$$\rho a \int_{s_0}^s f_2(s - \sigma) \varphi\left(\frac{\sigma}{V}\right) d\sigma$$

On constatera que l'intégrale ne fait pas de difficultés, et avec le changement de variable habituel

$$s - \sigma = w$$

il viendra

$$\rho a \int_0^{s-s_0} f_2(w) \varphi\left(\frac{s-w}{V}\right) dw$$

c'est-à-dire

$$\rho A e^{i\lambda t} a \int_0^{\alpha} f_2(w) e^{-i\frac{w\lambda}{V}} dw$$

En remplaçant A par sa valeur, on pourra écrire l'expression totale du moment sous la forme :

$$\pi \rho \left[\alpha_1 V \frac{d\theta}{dt} + \beta_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2h}{dt^2} + 4 V \mathcal{R}(a_1) \left(V \theta + \frac{dh}{dt} \right) \right]$$

$$+ 4 \pi a^2 \rho V \left(\frac{dh}{dt} + V \theta \right) \frac{\int_0^{\alpha} f_2(w) e^{-i\frac{\lambda w}{V}} dw}{-\frac{iV}{\lambda} + \int_0^{\alpha} \frac{2}{f(w)} e^{-i\frac{\lambda w}{V}} dw}$$

Les expressions trouvées ci-dessus pour la force et le moment, tout en tenant compte de l'épaisseur de l'aile, ont la même forme que celles qui ont été établies par Ellenberger (ou Theodorsen) pour la plaque. Elle se prête donc sans difficultés au calcul de la vitesse critique.

Nous noterons enfin que les expressions, physiquement acceptables, de la force et du mouvement sont :

$$F = \pi \rho i \left[-4 a v \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) + \alpha v \frac{d\theta}{dt} + \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \\ + 4 \pi a \rho i v \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) \mathcal{R} \frac{\int_0^\alpha f_1(w) e^{-i \frac{\lambda w}{v}} dw}{\int_0^\alpha \frac{2}{f(w)} e^{-i \frac{\lambda w}{v}} dw - i \frac{v}{\lambda}}$$

$$M_0 = \pi \rho \left[\alpha_1 v \frac{d\theta}{dt} + \beta_1 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2 h}{dt^2} + 4 v \mathcal{R}(\alpha_1) \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) \right] \\ + 4 \pi a^2 \rho v \left(v \theta + \frac{dh}{dt} \right) \mathcal{R} \frac{\int_0^\alpha f_2(w) e^{-i \frac{\lambda w}{v}} dw}{\int_0^\alpha \frac{2}{f(w)} e^{-i \frac{\lambda w}{v}} dw - i \frac{v}{\lambda}}$$

2° - Cas particulier de la plaque.-

Dans ce cas, le mouvement des molécules fluides par rapport au profil est toujours rectiligne dans le plan Z, même quand le mouvement est infiniment voisin de la translation *variée* à circulation nulle.

Pour établir l'équation intégrale (22) nous remarquons que

$$\zeta \zeta' = a^2 \quad \alpha = H(\zeta) = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} = \zeta + \zeta'$$

α étant l'affixe du tourbillon dans le plan du profil.

L'équation (9) du ch. III, se réduira ici à :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -l(t)$$

m et ωR étant négligeables devant l ;

On aura donc

$$\alpha = - \int l dt + C^{te} = \psi(t) + C$$

et si u désigne le passage du tourbillon à la pointe

$$\alpha = 2a + \psi(t) - \psi(u)$$

L'équation intégrale définissant l'intensité circulaire du sillage s'écrit

$$4 \pi a (m + a \omega) = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\alpha + 2a}{\alpha - 2a}} d\Gamma(u)$$

En posant

$$\psi(t) = s \quad \psi(u) = \sigma \quad \frac{d\Gamma}{du} = \varphi(u) = \Phi(\sigma) \frac{d\sigma}{dt}$$

on obtient

$$h(s) = \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{4a + s - \sigma}{s - \sigma}} \Phi(\sigma) d\sigma$$

avec

$$4\pi a(m + a\omega) = h(s)$$

La résolution de cette équation a été indiquée au § 1.1 du présent chapitre, nous aurons :

$$\Phi = h_2 \left[g_2^0 + g_2^1 + \dots + g_2^n + \dots \right]$$

avec

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} \left[h(x) (y-x)^{-\frac{1}{2}} + \int_x^y (y-\xi)^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{d\xi} d\xi \right]$$

$$(\xi = \sigma, \quad y = s, \quad x = s_0)$$

$$h_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \left[h(x) (y-x)^{-\frac{1}{2}} + \int_x^y (y-\xi)^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{d\xi} d\xi \right]$$

et

$$g = \sqrt{4a + y - x}$$

$$g_1(x, y) = \int_x^y \frac{\sqrt{4a + \xi - x} (\xi - x)^{-\frac{1}{2}} (y - \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

qui devient avec

$$\xi = x + r(y-x)$$

$$g_1(xy) = \int_0^1 \frac{\sqrt{4a + r(y-x)}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} \frac{dr}{r^{\frac{1}{2}} (1-r)^{\frac{1}{2}}}$$

enfin

$$g_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^1 \frac{\frac{\partial g}{\partial y} r(y-x)}{r^{\frac{1}{2}} (1-r)^{\frac{1}{2}}} dr$$

soit

$$g_2 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^1 \frac{r dr}{2 r^{\frac{1}{2}} (1-r)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4a + r(y-x)}}$$

que l'on peut simplifier en posant $r = \sin^2 v$

$$g_2 = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 v dv}{\sqrt{4a + (y-x) \sin^2 v}}$$

On pourra remarquer enfin que g_2 est une intégrale elliptique dont la réduction est aisée.

Posons

$$\frac{y-x}{a} = \rho \quad \frac{\rho}{4+\rho} = \sin^2 \theta \quad v = \frac{\pi}{2} - w$$

On obtient

$$g_2 = -\frac{1}{4\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 v}{\sqrt{4+\rho - \rho \cos^2 v}} dv = \frac{1}{4\pi a} \frac{1}{(4+\rho)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 w}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 w}} dw$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi a (4+\rho)^{\frac{1}{2}}} I_1(\theta) - \frac{1}{4\pi a (4+\rho)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 w}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 w}} dw$$

et finalement

$$g_2 = -\frac{1}{8\pi a} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left[I_2(\theta) - \cos^2 \theta I_1(\theta) \right]$$

$$\text{avec} \quad \rho = 4 \operatorname{tg}^2 \theta$$

Il n'y a pas de difficultés de convergence, puisque la série :

$$g_0^x + g_1^x + \dots + g_n^x + \dots$$

est majorée par

$$M^0 + M \frac{(y-x)}{1} + \dots + \frac{M^n (y-x)^n}{n!}$$

M étant maximum du module de

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 v dv}{\sqrt{4a + (y-x) \sin^2 v}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{8a}$$

2.1.- Cas particuliers.-

En prenant h sous la forme

$$4\pi\theta B v t^{v-1}$$

on pourra étudier un mouvement de translation de la plaque dont la loi sera :

$$x_1 = B t^v$$

θ étant l'angle (qui doit rester petit) de ox et o_1x_1 . Il en résultera pour h_2 , l'expression

...

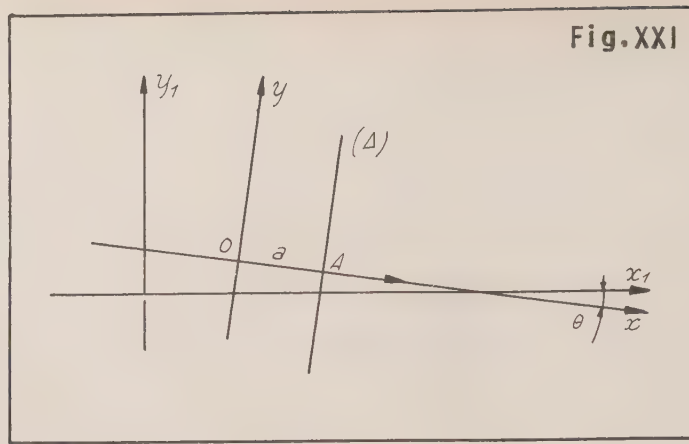


Fig. XXI

$$h_2 = 2 a v B^{\frac{1}{v}} \left\{ x^{v-1} (y-x)^{-\frac{1}{2}} + 2 (v-1) (y-x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x + (y-x) \sin^2 v]^{v-1} \sin v dv \right.$$

ou en posant

$$\cos v = z$$

$$h_2 = 2 a v B^{\frac{1}{v}} \left\{ x^{v-1} (y-x)^{-\frac{1}{2}} + 2 (v-1) (y-x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 [x + (y-x) (1-z^2)]^{v-1} dz \right\}$$

Dans le cas du mouvement uniforme

$$v = 1$$

On obtient pour φ une expression de la forme :

$$\varphi = 2 a B \left[y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2 \pi \sqrt{a}} \int_0^y (\xi-x)^{-\frac{1}{2}} d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 v dv}{\sqrt{4 a + (y-\xi) \sin^2 v}} + \dots \right]$$

On pourra utiliser cette expression pour résoudre le problème de l'établissement de la circulation (Wagner).

Quand un profil passe brusquement du repos au mouvement, il y a échappement tourbillonnaire à la pointe (chap. III § 1) et pour un mouvement à circulation constante, cette dernière met un certain temps à s'établir.

Ici, la circulation devra atteindre la valeur

$$4 \pi a B \theta$$

nous aurons donc

$$4 \pi a B \theta = \int_0^T \varphi(u) du$$

et cette équation déterminera le temps T mis par la circulation pour s'établir. Bien entendu, le problème peut se traiter de la même manière pour un profil et un angle θ quelconques.

$\mu=2$ donnera le cas du mouvement uniformément varié

$$h_2 = 4 a B^{\frac{1}{2}} \left\{ x (y-x)^{\frac{1}{2}} + 2 (y-x)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 [x + (y-x) (1-z^2)] dz \right\}$$

soit

$$h_2 = 4 a B^{\frac{1}{2}} \left\{ x (y-x)^{-\frac{1}{2}} + 2 (y-x)^{\frac{1}{2}} \left[x + \frac{2}{3} (y-x) \right] \right\}$$

On aura pour φ

$$\varphi = 4 a B^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2 \pi \sqrt{a}} \int_0^y x (\xi-x)^{-\frac{1}{2}} + 2 (\xi-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x + 2 \xi}{3} d\xi \right. \\ \left. \times \int_0^{\frac{\Gamma}{2}} \frac{\sin^2 v dv}{\sqrt{4 a + (y-\xi) \sin^2 v}} + \dots \right]$$

quand y reste petit, on a :

$$\varphi = 4 a B^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15 a} y^{\frac{5}{2}} + \dots \right]$$

2.2.- Calcul de la force et du moment.-

Pour un profil quelconque, nous avons trouvé :

$$F = \pi \rho i \left[-4 a v \left(\frac{dh}{dt} + v \theta \right) + \alpha v \frac{d\theta}{dt} + \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 h}{dt^2} \right] + \\ + \pi \rho i \int_{s_0}^s f_1 (s-\sigma) \varphi \left(\frac{\sigma}{v} \right) d\sigma$$

$$M_0 = \pi \rho \left[R(a_1) v (v \theta + \frac{dh}{dt}) + \alpha_1 v \frac{d\theta}{dt} + \beta_1 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \\ + \rho a \int_{s_0}^s f_2 (s-\sigma) \varphi \left(\frac{\sigma}{v} \right) d\sigma$$

Pour la plaque $-2 a \leq x \leq +2 a$

les coefficients valent :

$$\alpha = -4 a^2$$

$$\alpha_1 = -4 a^3$$

$$\beta = 4 a^3$$

$$\beta_1 = -2 a^4$$

$$\gamma = -4 a^2$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$R(a_1) = a^2$$

$$\Omega = a$$

On calcule $f(w)$ en utilisant le système

$$\zeta = a + a f(w)$$

$$\alpha = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} = H(\zeta)$$

$$\alpha = 2 a + w$$

qui donne

$$\zeta = a + \frac{w + \sqrt{4 a w + w^2}}{2}$$

$$f(w) = \frac{w + \sqrt{4 a w + w^2}}{2 a}$$

En utilisant la forme particulière de $H(\zeta)$ et la relation $\zeta \cdot \zeta' = a^2$ on peut écrire $f_1(w)$ sous la forme

$$f_1(w) = \frac{2}{V} \left[\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \frac{V}{f(w)} \right]$$

c'est-à-dire

$$f_1(w) = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4 a^2}} + \frac{2}{f(w)}$$

Soit en remplaçant α par sa valeur en fonction de w

$$f_1(w) = \frac{2 a}{\sqrt{4 a w + w^2}}$$

Le calcul de $f_2(w)$ se conduit de la même manière et donne

$$f_2(w) = - \frac{2 a}{\sqrt{4 a w + w^2}}$$

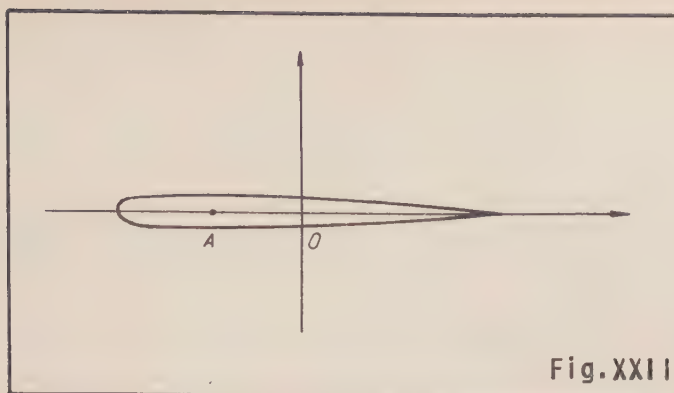
Les formules qui donnent la force et le moment par rapport au centre de la plaque peuvent donc s'écrire :

$$F = 4 \pi \rho i a \left[- V \left(\frac{dh}{dt} + V \theta \right) - a \frac{d}{dt} \left(\frac{dh}{dt} + V \theta \right) + a^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] + 2 \pi \rho i a \int_{s_0}^s \frac{\varphi \left(\frac{\sigma}{v} \right) d\sigma}{\sqrt{4 a (s-\sigma) + (s-\sigma)^2}}$$

$$M_0 = 2 \pi \rho a^2 \left[2 V \left(\frac{dh}{dt} + V \theta \right) - 2 a V \frac{d\theta}{dt} - a^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] - 2 \pi \rho a^2 \int_{s_0}^s \frac{\varphi \left(\frac{\sigma}{v} \right) d\sigma}{\sqrt{4 a (s-\sigma) + (s-\sigma)^2}}$$

REMARQUE I. — Dans le mouvement de translation, on sait que la force (dans le cas de la plaque) passe au quart avant ($z = -a$), le moment calculé en ce point doit donc avoir une expression plus simple que la précédente; en effet :

$$M_A = M_0 + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{F} \quad (\text{Fig. XXII})$$



$$M_A = M_o - R \text{ à } F$$

C'est-à-dire :

$$M_A = - 8 \pi \rho a^3 v \frac{d\theta}{dt} + 2 \pi \rho a^4 \frac{d^2\theta}{dt^2} - 4 \pi \rho a^3 \frac{d^2h}{dt^2}$$

REMARQUE II.- Dans le cas d'un mouvement à circulation nulle, on sait que :

$$v \theta + \frac{dh}{dt} = 0$$

et les formules se réduisent à :

$$F = 4 \pi \rho i a^3 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$M_o = - 2 \pi \rho a^3 \left(2 v \frac{d\theta}{dt} + a \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - BIRNBAUM - *Distribution de la circulation le long de la corde d'un profil animé de mouvements périodiques quelconques.*
Z.A.M.M.* : 1923 - p. 290-297 - 1924, p. 278-292 - 1934 p. 277.
- 2 - BIRNBAUM - *Dynamischen Auftrieb von Tragflügeln* - Z.A.M.M. 1925 - p. 17-35
- 3 - BORBELY - *Ecoulement non stationnaire en régime supersonique* - Z.A.M.M. 1942 - Traduction G.R.A. 530 T.T.
- 4 - CICCALA - *Lo stato attuale delle Ricerche sul moto instazionario di una superficie portante* - Aerotecnica - septembre octobre 1941.
- 6 - DUNCAN - *Notions fondamentales sur les vibrations des ailes* - Aircraft Engineering, janvier 1945.
- 7 - DUNCAN et COLLAR - *Résistance derivatives of flutter theory* - A.R.C. N° 7470 - Décembre 1943.
- 8 - DIETZE - *Zur Berechnung der Auftriebskräfte am Schwingenden Ruder* - Luftfahrtforschung 1937.
- 9 - ELLENBERGER - *Luftkräfte bei beliebige instationäre Bewegung eines Tragflügels mi Querruder* - Z.A.M.M. 1938.
- 10 - GLAUERT - *The accelerated motion of a cylindrical body through a fluid*
Reports and Memoranda 1929 - N° 1215.
- 11 - GLAUERT - *The force and moment on an oscillating airfoil*
Reports and Memoranda - 1929 - N° 1242
- 12 - GLAUERT - *Theoretical relationship for one airfoil with hinged flap*
Reports and Memoranda 1927 - N° 1095
- 13 - GARRICK - *On some Fourier transform. in the theory of non-stationary flows* - Wintern Congress for appl. mechanics 1938.
- 14 - GARRICK - *On some reciprocal relations in the theory of non-stationary flows* - NACA 1938 - N° 629.
- 15 - GARRICK - *La propulsion d'une aile battante et oscillante* - NACA 1936
N° 567 - Traduction G.R.A. N° 567.
- 16 - GOLDSTEIN - *Boundary layer in periodic motion - Modern developments in fluid dynamics,* - Oxford - Vol. 1 p. 187.
- 18 - JONES - *Portance non uniforme d'une aile d'envergure finie* - NACA 1939 - N° 682
- 19 - JONES - *Aerodynamic Forces on wings in non uniform motion*
Reports and Memoranda - 1945 - N° 2117.
- 20 - JONES - *Aerodynamic Forces on wings in simple harmonic motion* - Reports and Memoranda 1945 - N° 2026
- 21 - KUSSNER - *Oscillations d'ailes d'avion* - Luftfahrtforschung 1929.

- 22 - KUSSNER - Augenblicklicher Entwicklungs Stand der Frage des Flügelflat-
terns - Luftfahrtforschung 1935.
- 23 - KUSSNER et SCHWARZ - Der Schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenen Ruder -
Luftfahrtforschung - Déc. 1940.
- 24 - KARMAN et SEARS - Airfoil theory for non-uniform motion - Journal of Aeronautical
Sciences - Avril 1938 - vol. 5-n° 5.
- 26 - H.M. LYON - A review of theoretical investigations of the aerodynamical
forces on a wing in non uniform motion - Reports and memoranda-
1937 - n° 1786.
- 27 - MORISS ROSA - Hydrodynamic theory of two dimensional non stationary motion -
Proceedings of the Royal Society - Serie A. n° 1015 - vol. 188 -
février 1947.
- 28 - MULLER - Les forces agissant sur un profil en mouvement accéléré dans
un fluide parfait - Ingenieur Archiv. T. 14 - 1943.
- 29 - MULLER - Etude de l'aile Joukowsky - Z.F.A.M.M. 1943.
- 30 - PERES - Cours de mécanique des fluides - chapitre VII - p. 160-185 -
Gauthier-Villars - Edr. 1936.
- 31 - ROX BIE COX - A statistical method of investigating the relation between the
elastic stiffness of aeroplane wings and wing aileron flutter.
Reports and Memoranda 1505 - octobre 1932.
- 32 - SAUER - Theory of the non-stationary gasflow - Bibliothèque ONERA -
n° 1947.
- 33 - THEODORSEN - General theory of aerodynamic instability - NACA n° 496 - 1934
- 34 - VOGEL - Recherches sur les forces aérodynamiques qui agissent sur les
ailes battantes -
Flugsport - Mars 1944.
- 35 - WAGNER - Dynamischen Auftrieb von Tragflügeln - Z.A.M.M. 1925 -
p. 17 à 35.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES CHAMPS VECTORIELS
ET DES CHAMPS DE SURFACES PLANES OU CONIQUES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 10 Mars 1948

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. CABANNES

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,
J. SARRAILH

Imp. Servant-Crouzet
11, Av. de Vaugirard-Nouveau
Paris 15ème